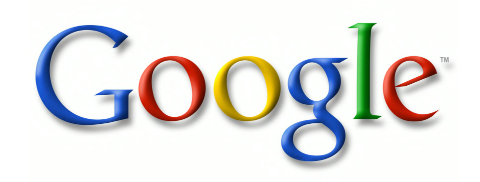
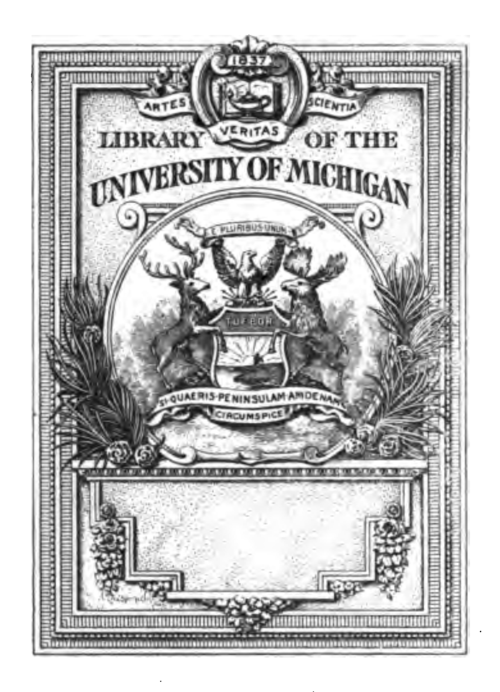
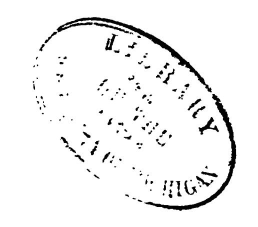






1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI·QUAERIS·PENINSULAM·AMOENAM
CIRCUMSPICE



COURS

DE MÉCANIQUE.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, seconde édition. 2 vol. in-8°; 1847 .... 10 fr.

COURS DE MÉCANIQUE, seconde édit. 2 vol. in-8° avec planches. 12 fr.

PROBLÈMES ET DÉVELOPPEMENTS SUR DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES, par MM. Duhamel et Reynaud. In-8°.... 7 fr. 50 c.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

COURS

DE MÉCANIQUE,

PAR M. DUHAMEL,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

DEUXIEME PARTIE.

Seconde édition.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,

Imprimeur-Libraire

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1854

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE TROISIÈME.

DYNAMIQUE (SUITE).

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XX.

CHAPITRE XXI.

CHAPITRE XXII.

CHAPITRE XXIII.

CHAPITRE XXIV.

HYDROSTATIQUE.

HYDRODYNAMIQUE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE.

ERRATA du tome Ier.

Depuis la page 207 jusqu'à la fin du volume, *effacer* le mot STATIQUE au haut des pages.

Depuis la page 293 jusqu'à la fin, *remplacer* au haut des pages le mot STATIQUE par le mot DYNAMIQUE.

Page 296, ligne 9; *au lieu de* plan, *lisez* point.

COURS
DE MÉCANIQUE.

LIVRE TROISIÈME.

DYNAMIQUE.

(SUITE.)

CHAPITRE X.

MOUVEMENT AUTOUR D'UN CENTRE D'ACTION, FIXE OU MOBILE.

1. Considérons d'abord un point matériel libre sollicité par une force dont la direction passe par un point fixe, et dont l'intensité ne dépend que de la distance à ce centre d'action. Nous savons que le mouvement aura lieu dans le plan qui contient la direction de la vitesse initiale et le point fixe. Prenons ce point pour origine de coordonnées rectangulaires x, y situées dans ce plan; désignons par r la distance d'un point quelconque à l'origine; par θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x positifs, et par φ l'intensité de la force accélératrice. Les cosinus des angles que sa direction fait avec les axes seront respectivement $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$ si la force est attractive; et $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ si elle est répulsive. Les composantes de la force seront, dans le premier cas,

$-\varphi\frac{x}{r}$, $-\varphi\frac{y}{r}$; et, dans le second, $\varphi\frac{x}{r}$, $\varphi\frac{y}{r}$: nos formules se rapporteront au premier cas, et il suffirait d'y changer le signe de φ pour passer au second.

Les équations générales du mouvement du point seront

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}.$$

Le principe des aires donnera

$$(1) \qquad r^2 d\theta = c dt,$$

c désignant une constante arbitraire qui se déterminera facilement par les données de l'état initial.

En effet, les composantes de la vitesse, suivant la direction du rayon vecteur et la perpendiculaire à cette direction, sont respectivement $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{rd\theta}{dt}$. Mais si l'on désigne par α l'angle formé par la direction de la vitesse initiale avec celle de la droite menée de la position initiale du point vers le pôle, et par v_0 la vitesse initiale, on aura $v_0 \sin\alpha$ pour valeur de la composante initiale dont la valeur générale est $\frac{rd\theta}{dt}$; on connaîtra donc la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$ qui sera $\frac{v_0 \sin\alpha}{r_0}$. En la reportant, ainsi que la valeur initiale de r que nous désignons par r_0, dans l'équation

$$r^2 d\theta = c dt,$$

on obtient

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha.$$

Le principe des forces vives conduira à l'équation suivante :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -2\int \varphi\, dr = v^2;$$

cette intégrale indéfinie renferme une nouvelle constante arbitraire qui sera déterminée par les valeurs initiales de v

et r. On trouvera ainsi

$$v^2 = v_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr. \tag{2}$$

Remplaçant ds^2 par $dr^2 + r^2\, d\theta^2$, l'avant-dernière équation devient

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = -2\int \varphi\, dr.$$

Éliminant dt au moyen de l'équation (1), on obtiendra une équation entre r et θ qui sera celle de la trajectoire; vient ainsi

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\frac{dr^2}{d\theta^2}}{r^4}\right) = -\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right]. \tag{3}$$

2. Lorsque la force φ sera connue en fonction de r, l'équation (3) déterminera la trajectoire.

Lorsqu'au contraire la trajectoire sera connue, et que la force φ sera inconnue, il suffira de différentier l'équation (3) par rapport à r, pour connaître φ. On trouve ainsi, en effectuant généralement cette différentiation,

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2.\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right). \tag{4}$$

Le second membre se formera en faisant usage de l'équation de la trajectoire; mais il sera quelquefois plus commode d'employer à cet effet la formule (3), et de n'opérer la différentiation qu'à la fin.

Dans tous les cas, l'équation de la trajectoire étant connue, on en tirera l'une des deux coordonnées en fonction de l'autre, et, par suite, l'équation (1) fera connaître t en fonction de r ou de θ, et réciproquement. Le problème sera donc complétement résolu, puisqu'on aura l'expression des coordonnées du mobile en fonction du temps.

3. L'équation (2) prend une forme remarquable quand on y introduit la perpendiculaire p abaissée de l'origine sur la tangente à la trajectoire. En effet, les triangles semblables donnent

$$\frac{ds}{rd\theta} = \frac{r}{p}, \quad \text{ou} \quad ds = \frac{r^2 d\theta}{p},$$

d'où l'on tire, en faisant usage de l'équation (1),

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{c}{p},$$

ce qui donne d'abord cette conséquence remarquable que, dans tout mouvement produit par une force passant par un point fixe, la vitesse en un point quelconque de la trajectoire est en raison inverse de la distance du point fixe à la tangente.

Substituant cette valeur de v dans l'équation (2), elle devient

$$(5) \qquad \frac{c^2}{p^2} = v_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr.$$

C'est l'équation de la trajectoire dans un système particulier de coordonnées.

4. Supposons, en second lieu, que le centre d'action soit mobile. Nous avons démontré, dans la première partie du cours, que toutes les propriétés du mouvement absolu subsistaient pour le mouvement relatif, en substituant partout aux quantités absolues les quantités relatives. Les formules précédentes subsistent donc en considérant x et y comme les coordonnées du point M par rapport à des axes passant constamment par le centre mobile, et se mouvant parallèlement à eux-mêmes; r comme la longueur de la droite qui joint à chaque instant ce centre au point maté-

riel; θ comme l'angle que cette droite fait avec l'axe des x; et enfin φ comme la force accélératrice relative du point matériel, c'est-à-dire comme la résultante de la force accélératrice absolue qui y est appliquée, composée avec une force égale parallèle et de sens contraire à celle qui déterminerait un mouvement identique à celui du centre mobile.

Nous allons donner quelques exemples des formules qui viennent d'être établies.

5. Premier exemple. — *Un point décrivant une ellipse par l'action d'une force dirigée vers son centre, trouver l'expression de cette force.*

Il est facile de reconnaître d'abord que toutes les conditions de la question sont compatibles. Car on peut toujours obliger un point à se mouvoir sur une courbe quelconque, et de telle manière que les aires décrites par le rayon vecteur mené d'un point fixe quelconque au point mobile soient proportionnelles au temps. On peut donc toujours supposer qu'un point mobile décrit une courbe donnée quelconque, par l'action d'une force dont la direction passe par un point fixe quelconque.

Cela posé, soient $2a$, $2b$ le grand et le petit axe de cette ellipse. Prenons son centre pour pôle et comptons les angles à partir du grand axe; l'équation de cette courbe sera

$$(a)\qquad \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\cdot\sin^2\theta,$$

d'où, en différentiant,

$$(b)\qquad \frac{1}{r}\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\sin\theta\cos\theta.$$

Si nous exprimons le second membre en fonction de r au moyen de l'équation (a), nous tirerons de l'équation (b)

$\dfrac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}$ en fonction de r; et en le reportant dans la formule générale (3), nous aurons la valeur de $\int \varphi\, dr$, et, par suite, la valeur de φ en fonction de r.

Or l'équation (a) donne

$$\sin^2\theta = \frac{b^2(a^2 - r^2)}{(a^2 - b^2)r^2}, \quad \text{et, par suite,} \quad \cos^2\theta = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)r^2}.$$

L'équation (b) donne, en substituant ces valeurs,

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{a^2 b^2 r^2}.$$

En reportant cette expression dans la formule (3), on trouve

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}\right),$$

et, en différentiant par rapport à r,

$$\varphi = \frac{c^2 r}{a^2 b^2}.$$

Ainsi, dans ce mouvement, la force émanant du centre sera proportionnelle à la distance au centre, et elle sera attractive, puisque la valeur trouvée pour φ est positive.

D'après le principe des aires, le point mettra toujours le même temps à parcourir l'ellipse entière, à partir d'une quelconque de ses positions. Désignons ce temps par T. Comme la constante c représente le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps, $\frac{1}{2}c\mathrm{T}$ sera l'aire totale de l'ellipse, et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}c\mathrm{T} = \pi ab, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi ab}{c}.$$

Si l'on veut introduire la durée de la révolution dans l'expression de la force, on obtiendra

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

Si, au lieu d'une ellipse, on avait considéré une hyperbole, on aurait trouvé une force répulsive agissant suivant une loi semblable.

6. *Réciproquement.* — Si un point est attiré vers un centre fixe par une force proportionnelle à la distance, il décrira une ellipse dont ce point fixe sera le centre.

En effet, concevons une ellipse qui ait pour centre le point fixe, qui passe par la position initiale du mobile et soit tangente à la direction de sa vitesse initiale. Ajoutons enfin, pour déterminer complétement la courbe, cette dernière condition que, dans la position initiale, la force attractive donnée, estimée suivant la normale, ou la force centripète, soit égale au carré de la vitesse initiale qui est donnée, divisé par le rayon de courbure en ce même point. Ce rayon sera ainsi connu, et l'on aura assez de conditions pour que l'ellipse soit déterminée.

Cela posé, si l'on oblige, d'une manière quelconque, le point partant de son état initial, à se mouvoir sur cette ellipse, de telle sorte que les aires décrites par le rayon vecteur mené du centre, soient proportionnelles au temps, la discussion précédente prouve qu'il sera sollicité par une force dirigée vers le centre, et proportionnelle à la distance. Mais cette force ne sera autre que la proposée. En effet, elle est dirigée vers le même point, elle suit la même loi, et elle a la même valeur au point de départ, puisqu'on a déterminé le rayon de courbure de l'ellipse par cette condition. Cette ellipse sera donc décrite en vertu de la force donnée. Et, par conséquent, une force qui attire un mobile vers un centre

fixe proportionnellement à la distance à ce point, fait décrire une ellipse dont ce point est le centre.

Ce mouvement présente une particularité qui mérite d'être remarquée.

Nous avons reconnu dans le problème précédent que la force φ se trouvait exprimée par la formule suivante au moyen de la durée T de la révolution entière :

$$\varphi = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Si l'on désigne par μ sa valeur à l'unité de distance, on aura

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Ce qui montre que la durée de la révolution est indépendante des circonstances initiales qui déterminent l'ellipse particulière; elle ne varierait qu'avec la constante μ qui mesure l'intensité de la force attractive à l'unité de distance.

7. *Solution analytique de cette seconde question.* — Traitons maintenant par l'analyse cette question réciproque, et proposons-nous de trouver la courbe que décrit un point attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance à ce centre.

On a, dans ce cas, $\varphi = \mu r$, μ étant positif dans le cas de l'attraction, et négatif dans le cas de la répulsion : l'équation (3) donne, en représentant par c' une constante arbitraire, qui sera déterminée par l'état initial,

$$\pm \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \sqrt{-\frac{\mu r^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} + 2c'};$$

en posant $\left(\frac{1}{r}\right)^2 = z$, on tire

$$\pm 2d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-\frac{\mu}{c^2} - z^2 + 2c'z}} = \frac{dz}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2} - (c'-z)^2}},$$

d'où, en intégrant et désignant par α une constante arbitraire qui résultera des valeurs initiales de r et θ,

$$\pm 2(\theta - \alpha) = \arccos \frac{c' - z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}}.$$

Si, pour plus de simplicité, on compte les angles à partir de la direction qui fait l'angle α avec l'axe primitif, il faudra remplacer $\theta - \alpha$ par θ, et l'équation précédente devient, en prenant les cosinus des deux membres,

$$\frac{c' - z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}} = \cos 2\theta,$$

d'où

$$z = c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{1}{r^2}.$$

Multipliant par r^2, il vient

$$c'(x^2 + y^2) - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}(x^2 - y^2) = 1,$$

ou

$$\left(c' + \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right) y^2 + \left(c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right) x^2 = 1.$$

Or, si μ est positif, les coefficients de x^2 et y^2 sont de même signe, et la trajectoire est une ellipse ayant pour centre le point fixe, comme nous l'avions démontré synthétiquement. Si μ est négatif, c'est-à-dire si la force est

répulsive, les coefficients sont de signes contraires, et *la courbe est une hyperbole ayant encore le point fixe pour centre.*

Dans ce dernier cas le mouvement n'est pas révolutif, et le point reste évidemment sur la même branche de l'hyperbole.

8. La question que nous venons de traiter présente une circonstance dont on peut profiter pour obtenir directement les valeurs des coordonnées x et y en fonction de t; ce qui donne la solution la plus complète de la question, puisque l'on connaît alors la position du mobile à chaque instant, et que tous les autres éléments du mouvement en dérivent immédiatement. Les équations générales du mouvement d'un point deviennent, en supposant $\varphi = \mu r$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y.$$

Les variables x et y étant séparées, on peut intégrer chacune de ces équations, et l'on connaîtra x et y en fonction de t. On trouve d'abord, en supposant μ positif,

$$x = \mathrm{A} \sin t.\sqrt{\mu} + \mathrm{B} \cos t.\sqrt{\mu},$$
$$y = \mathrm{A}' \sin t.\sqrt{\mu} + \mathrm{B}' \cos t.\sqrt{\mu}.$$

Prenons pour axe des x la ligne qui joint l'origine à la position initiale du point : désignons par r_0 la longueur de cette ligne, par v_0 la vitesse initiale, par α l'angle formé par la direction de cette vitesse et celle de la droite menée de la position initiale vers l'origine. Enfin, prenons l'axe des y du même côté de l'axe des x que la direction initiale de la vitesse. On devra avoir pour $t = 0$ les conditions

$$y = 0, \quad x = r_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha, \quad \frac{dx}{dt} = -v_0 \cos \alpha.$$

Les quatre coefficients A, B, A′, B′ seront déterminés par là, et l'on aura, par suite,

$$x = -\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{\mu}} \sin . t\sqrt{\mu} + r_0 \cos . t\sqrt{\mu},$$

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\sqrt{\mu}} \sin . t\sqrt{\mu}.$$

Ces équations renferment la solution complète du problème. Elles donnent pour x et y des valeurs périodiques, et la durée de la période est pour l'une et l'autre $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, comme nous l'avions déjà trouvé.

En éliminant t entre elles, on trouve

$$(x \sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} y^2 = r_0^2 \sin^2\alpha.$$

Ainsi, lorsque μ est positif, c'est-à-dire quand la force est attractive, la courbe décrite est une ellipse dont le point fixe est le centre. Cette ellipse se réduirait à un cercle si l'on avait

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad v_0^2 = \mu r_0^2.$$

Si μ est négatif, c'est-à-dire si la force est répulsive, les sinus et cosinus sont remplacés par des exponentielles; mais on peut se servir du calcul qui vient d'être fait, et opérer la transformation dans les résultats. L'équation de la trajectoire devient, par le changement de signe de μ, celle d'une hyperbole ayant le même centre, et les valeurs de x et y prennent la forme suivante :

$$x = \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{t\sqrt{\mu}} + \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{-t\sqrt{\mu}},$$

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha}{2\sqrt{\mu}}\left(e^{t\sqrt{\mu}} - e^{-t\sqrt{\mu}}\right).$$

Elles ne deviennent infinies que lorsque t lui-même le devient; ainsi le point mettrait un temps infini à parcourir la branche d'hyperbole sur laquelle il se trouve au commencement du mouvement.

9. Deuxième exemple. — *Un point matériel décrivant une section conique par l'action d'une force dont la direction passe constamment par un foyer de cette courbe, trouver l'expression de cette force.*

Quelle que soit cette section conique, son équation polaire peut être mise, comme on sait, sous la forme

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

p désignant le demi-paramètre, e l'excentricité; un foyer de la courbe étant pris pour pôle, et les angles θ étant comptés à partir de l'axe du côté, du sommet le plus voisin. La courbe sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant qu'on aura

$$e < 1, \quad e = 1, \quad e > 1.$$

L'équation de la courbe donne

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e\cos\theta}{p},$$

d'où

$$\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{p}.$$

Si l'on veut, comme dans l'exemple précédent, faire usage de la formule (3), on y reportera cette expression, dans laquelle on remplacera d'abord $\sin\theta$ par sa valeur en r, tirée de l'équation de la courbe, et l'on trouvera ainsi

$$\int\varphi dr = -\frac{c^2}{pr} + \frac{c^2(1-e^2)}{2p^2},$$

d'où

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Ce qui apprend d'abord que la force est attractive vers le foyer, puisque la valeur de φ est positive; et ensuite que son intensité varie en raison inverse du carré de la distance à ce point.

Il aurait été plus simple, dans le cas actuel, de faire usage de la formule (4). En effet, l'équation de la courbe donne immédiatement

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{p},$$

et, reportant dans l'équation (4), on obtient

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Nous ne développerons pas ici cette question, qui se reproduira bientôt à l'occasion du mouvement des planètes.

10. *Réciproque.* — Cherchons maintenant toutes les courbes que pourrait décrire un point attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

Nous nous bornerons pour le moment à donner une solution synthétique de cette question.

Nous concevrons une section conique dont le point fixe serait un foyer, qui passerait par la position initiale du point, et serait tangente à la direction de la vitesse initiale et du même côté que le point fixe; enfin nous achèverons de la déterminer en ajoutant la condition que le carré de la vitesse initiale divisé par le rayon de courbure au point de départ soit égal à la force connue qui agit en ce point, estimée suivant la normale.

Cette dernière condition fait connaître le rayon de cour-

bure, et la section conique est complétement déterminée et unique. Nous verrons tout à l'heure comment on peut la construire avec ces données et reconnaître son espèce.

Cela posé, imaginons un point assujetti à se mouvoir sur cette courbe avec la même vitesse initiale que le point en question, et de telle manière que son rayon vecteur partant du point fixe décrive des aires proportionnelles au temps. D'après la proposition précédente, la force qui agira sur ce point sera dirigée vers le point fixe, et son intensité sera en raison inverse du carré de la distance; de plus, il partira de la même position que le point proposé, et sa vitesse initiale sera la même en grandeur et en direction; enfin l'intensité de la force dirigée vers le point fixe sera la même au point de départ; car sa composante suivant la normale commune est égale au carré de la vitesse commune divisé par le rayon de courbure qui est le même. Donc la force à laquelle sera dû le mouvement sur cette section conique sera identique avec celle qui est donnée. Et comme, en vertu de cette force, le point en question, assujetti aux conditions initiales données, a son mouvement complétement déterminé, ce mouvement ne peut différer de celui qui a lieu sur cette section conique.

Ainsi, *un point attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance se meut nécessairement sur une section conique dont ce centre est un foyer.*

11. Il reste à déterminer cette courbe d'après les données, qui sont le foyer de la courbe, ou de la branche de courbe s'il s'agit d'une hyperbole, un point et la tangente, ainsi que le rayon de courbure en ce point; ce rayon de courbure devant être situé du même côté de la tangente que le foyer.

Soient F (*fig.* 1) le foyer, M le point donné, PQ la tangente, et O le centre de courbure. On sait qu'en abaissant

de O une perpendiculaire OH sur MF, puis une seconde de H sur la normale, le pied K de cette dernière appartient à l'axe principal qui contient le foyer. Joignant donc FK, on aura la direction de cet axe; et le second foyer sera donné par la rencontre de cette droite avec la droite MN, menée par le point M sous un angle PMN, égal à FMQ. Si la rencontre a lieu du côté de QP où se trouve le foyer F, la courbe sera une ellipse; elle sera une parabole si MN est parallèle à FK, et une hyperbole si la rencontre a lieu du côté opposé.

Or, il est facile de reconnaître, d'après les données initiales, lequel de ces trois cas arrivera. En effet, soit menée par le point F une parallèle à MN, qui coupe en I la normale. Si l'on a $MK < MI$, FK rencontrera MN en un point F′ situé du même côté que F par rapport à QP, et par conséquent la courbe sera une ellipse. Si l'on a $MK = MI$, la ligne FK sera parallèle à MN, et la courbe sera une parabole. Enfin, si l'on a $MK > MI$, la ligne FK rencontrera le prolongement MN′, et la courbe sera une hyperbole.

Il faut donc calculer MK et MI d'après les données de la question. Or, MI étant la bissectrice de l'angle FMF′, le triangle MFI est isocèle, et si l'on désigne l'angle connu FMO par ε et la distance donnée FM par r_0, on aura

$$MI = 2r_0 \cos\varepsilon.$$

Maintenant, d'après la manière dont le point K a été obtenu, on a

$$MK = MO\cos^2\varepsilon,$$

et si l'on désigne par v_0 la vitesse initiale, la valeur de MO sera donnée par l'équation

$$\varphi\cos\varepsilon = \frac{v_0^2}{MO},$$

φ etant la force qui agit sur le point M, et dont la valeur est $\frac{\mu}{r}$; on en déduira

$$\text{MO} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu \cos \varepsilon}, \quad \text{et par suite} \quad \text{MK} = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos \varepsilon}{\mu}.$$

Comparant les deux expressions obtenues pour MK et MI, et supprimant le facteur commun $r_0 \cos \varepsilon$, on voit que la trajectoire sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ sera négatif, nul ou positif. Il est remarquable que la nature de la courbe ne dépende que de la vitesse et de la distance du mobile au centre d'attraction, au commencement du mouvement, et que la direction de la vitesse n'y entre pour rien.

On pourrait traiter cette question par l'analyse en faisant usage de l'équation (3); on aurait à intégrer une équation différentielle du premier ordre entre r et θ; on reconnaîtrait facilement que l'équation ainsi obtenue peut représenter les trois sections coniques, et l'on serait conduit aux mêmes caractères que nous venons de trouver pour en faire la distinction. Mais nous aurons occasion de revenir sur cette question, et nous effectuerons alors les calculs que nous ne faisons qu'indiquer.

12. Troisième exemple. — *Trouver la trajectoire décrite par un point attiré vers un centre fixe, en raison inverse du cube de la distance.*

Soient A (*fig.* 2) le centre d'attraction, B le point dans sa position initiale, α l'angle que fait avec BA la direction BC de sa vitesse; représentons toujours par v_0 l'intensité de cette vitesse, et par r_0 la distance AB.

La formule (4), appliquée au cas actuel, où l'on a $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$,

donne

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \left(\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha} - 1\right)\frac{1}{r}.$$

Nous distinguerons trois cas, suivant que l'on aura $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha} - 1$ négatif, nul ou positif. Dans tous les cas, la vitesse v sera donnée par la formule

$$v^2 = \frac{\mu}{r^2} + c',$$

c' étant déterminé par les valeurs initiales de v et r.

1°. Soit d'abord $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha} - 1 = 0$, ce qui est le cas le plus simple; l'équation précédente devient

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{r} = A\theta + B.$$

Pour déterminer les constantes A et B, nous remarquerons qu'au point B, par lequel, pour plus de simplicité, nous ferons passer l'axe polaire, on doit avoir

$$r = r_0, \quad \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = -\tang\alpha.$$

Or, pour $\theta = 0$, l'équation de la courbe donne

$$\frac{1}{r} = B, \quad -\frac{\frac{dr}{d\theta}}{r^2} = A;$$

il en résultera donc

$$B = \frac{1}{r_0}, \quad A = \frac{\cot\alpha}{r_0},$$

et l'équation de la trajectoire sera

$$r = \frac{r_0}{1 + \theta \cot \alpha}.$$

Cette courbe est donc une spirale hyperbolique dont le point A est le pôle.

Si l'angle α est aigu, cot α est positif, et lorsque θ augmente indéfiniment, le mobile s'approche indéfiniment du pôle A.

Si α est droit, on a

$$\cot \alpha = 0, \quad \text{et} \quad r = a;$$

la courbe se réduit alors à un cercle. Et l'on peut remarquer une fois pour toutes que, dans toutes les lois d'attraction, si le mobile part avec une vitesse perpendiculaire au rayon vecteur, et telle que le carré de cette vitesse divisé par le rayon vecteur soit égal à la valeur de la force accélératrice qui agit sur lui à cet instant, il décrira nécessairement d'un mouvement uniforme le cercle qui aurait pour centre le pôle. Car ce cercle serait la trajectoire, en supposant une force constante égale à cette valeur initiale; mais il peut aussi être considéré comme décrit en vertu de la force proposée qui, ne dépendant que de la distance, agira toujours avec la même intensité à tous les points du cercle; donc, puisque cette courbe peut être considérée comme décrite en vertu de la force proposée, et que celle-ci ne peut produire qu'un seul mouvement d'après les données initiales, c'est cette courbe même qu'elle fera décrire.

Enfin, si α est obtus, le point ne tend plus vers le pôle, et le rayon devient infini pour $\theta = -\tang \alpha$, ce qui donne la direction de l'asymptote.

Cherchons maintenant à exprimer les coordonnées du mobile en fonction du temps.

L'équation $r^2 d\theta = c dt$ donne, en remplaçant r par sa

valeur,

$$dt = \frac{r_0^2\,d\theta}{c(1+\theta\cot\alpha)^2},$$

d'où

$$t = -\frac{r_0^2}{c\cot\alpha}\cdot\frac{1}{1+\theta\cot\alpha} + c';$$

en déterminant la constante c' par la condition qu'on ait en même temps $t=0$, $\theta=0$, et remplaçant c par sa valeur $r_0 v_0 \sin\alpha$, on aura

$$t = \frac{r_0}{v_0\cos\alpha}\left(1-\frac{1}{1+\theta\cot\alpha}\right) = \frac{1}{v_0\cos\alpha}(r_0 - r),$$

d'où l'on déduit

$$r = r_0 - v_0 t\cos\alpha,$$

et

$$\theta = \frac{1}{\cot\alpha}\left(\frac{1}{1-\dfrac{v_0 t}{r_0}\cos\alpha} - 1\right).$$

La valeur de r diminue à mesure que t augmente, et devient nulle pour $t = \dfrac{r_0}{v_0\cos\alpha}$; le mobile parviendrait donc au pôle après cet intervalle de temps, à partir du point de départ. Quant à la valeur correspondante de θ, elle augmente sans limite, et le mobile a fait dans ce même temps une infinité de révolutions autour du pôle.

Si maintenant on cherche les positions qui ont précédé le moment qu'on a pris pour origine du temps, il faut faire t négatif depuis zéro jusqu'à l'infini; r ira en croissant depuis r_0 jusqu'à l'infini, et θ depuis 0 jusqu'à $-\dfrac{1}{\cot\alpha}$ qui donne la direction de l'asymptote.

2°. Soit maintenant $\dfrac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha} - 1 = -n^2$, n étant une quantité réelle.

L'équation différentielle de la trajectoire aura pour intégrale

$$\frac{1}{r} = A \sin n\theta + B \cos n\theta.$$

En déterminant les constantes A et B d'après les données initiales, on obtient

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\theta + \frac{\cot \alpha}{n} \sin n\theta = \frac{\sin (n\theta + \varepsilon)}{\sin \varepsilon},$$

en posant $\frac{\cot \alpha}{n} = \cot \varepsilon.$

Si l'on veut connaître le point où le mobile sera le plus près du pôle, il faut rendre $\frac{1}{r}$ le plus grand possible, ce qui se fera en posant $\sin (n\theta + \varepsilon) = 1$, ou

$$r = r_0 \sin \varepsilon \quad \text{et} \quad n\theta + \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$n\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon;$$

on en déduit

$$\operatorname{tang} n\theta = \cot \varepsilon = \frac{\cot \alpha}{n},$$

comme on l'aurait trouvé en posant $\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta} = 0.$

A partir de cette valeur particulière, si l'on augmente ou qu'on diminue θ de quantités égales, $\sin (n\theta + \varepsilon)$ recevra les mêmes valeurs, et, par conséquent, la courbe est symétrique par rapport à la direction du rayon vecteur minimum.

La valeur de r deviendra infinie lorsqu'on aura

$$\sin (n\theta + \varepsilon) = 0, \quad \text{ou} \quad n\theta + \varepsilon = m\pi,$$

m désignant un nombre entier quelconque; on aura alors

$$\tan n\theta = -\tan\iota = -n\tan\alpha.$$

La plus petite valeur de θ qui satisfera à cette équation donnera la direction vers laquelle tendra le rayon vecteur en croissant indéfiniment; mais on ne l'obtiendra qu'après un temps infini, comme on le reconnaîtrait facilement en exprimant t en fonction de θ, d'après l'équation

$$r^2 d\theta = cdt.$$

3°. Supposons, en dernier lieu, $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha} - 1 = n^2$.

En intégrant l'équation différentielle de la trajectoire, on trouvera d'abord

$$\frac{1}{r} = \mathrm{A}e^{n\theta} + \mathrm{B}e^{-n\theta},$$

et en déterminant les constantes A et B d'après l'état initial, on obtiendra

$$\frac{2r_0}{r} = \left(1 + \frac{\cot\alpha}{n}\right)e^{n\theta} + \left(1 - \frac{\cot\alpha}{n}\right)e^{-n\theta}.$$

On voit par là que, θ croissant indéfiniment, r tendra vers zéro.

Si, pour plus de simplicité, on suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$r = \frac{2r_0}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}.$$

Cette spirale sera symétrique par rapport à l'axe polaire; ses deux branches auront le pôle pour asymptote, et il est facile de voir que le mobile y parviendra après un temps fini. En effet, de l'équation

$$r^2 d\theta = cdt$$

on tire

$$cdt = \frac{4 r_0^2 \, d\theta}{(e^{n\theta} + e^{-n\theta})^2} = \frac{4 r_0^2 e^{2n\theta} d\theta}{(e^{2n\theta} + 1)^2},$$

d'où

$$\frac{nct}{2 r_0^2} = -\frac{1}{e^{2n\theta} + 1} + C_1.$$

Déterminons la constante C_1 par la condition qu'on ait à la fois $t = 0$, $\theta = 0$, on trouvera

$$C_1 = \tfrac{1}{2},$$

et, par suite,

$$e^{2n\theta} = \frac{2}{1 - \frac{nct}{r_0^2}} - 1.$$

Or, θ croît indéfiniment à mesure que t s'approche de $\frac{r_0^2}{cn}$; ainsi le mobile parvient au pôle au bout de ce temps.

Si l'on cherche le mouvement qui a précédé l'époque prise pour origine du temps, il faut supposer t négatif; l'équation précédente donnera alors θ négatif, et l'on trouvera $\theta = -\infty$ lorsque l'on aura $t = -\frac{r_0^2}{nc}$, comme on pouvait le prévoir.

Il est un cas particulier qui mérite d'être remarqué : c'est celui où il n'entre qu'une seule exponentielle dans l'équation de la trajectoire, qui devient alors une spirale logarithmique. Ce cas a lieu quand on a

$$\cot\alpha = \pm n.$$

Supposons, par exemple, $\cot\alpha = -n$. On a pour l'équation de la trajectoire

$$r = r_0 e^{n\theta}.$$

C'est ce qu'on aurait pu reconnaître immédiatement au

moyen de l'équation (3) qui, dans le cas actuel, a la forme

$$c^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=(\mu-c^2)r^2+\left(v_0^2-\frac{\mu}{r_0^2}\right)r^4.$$

Or, lorsque les constantes données satisferont à la condition $v_0^2=\frac{\mu}{r_0^2}$, il est évident que l'équation donnera une valeur constante pour le rapport $\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$ qui est la tangente de l'inclinaison du rayon vecteur sur la courbe; or, c'est là la propriété caractéristique de la spirale logarithmique. Dans ce cas, la valeur de n^2, qui est

$$\frac{\mu}{c^2}-1,\quad \text{ou}\quad \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}-1,$$

devient

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}-1,\quad \text{ou}\quad \cot^2\alpha;$$

ce qui ramène à la condition déjà trouvée.

CHAPITRE XI.

APPLICATION DE CE QUI PRÉCÈDE AU SYSTÈME DU MONDE.

13. L'observation attentive des mouvements des corps célestes, continuée pendant un grand nombre de siècles, en a fait connaître plusieurs lois générales qui ont pu servir de base à l'application des théories mathématiques. Pour que les formules que nous avons établies puissent s'appliquer au mouvement des planètes et de tous les autres corps célestes, il suffit d'admettre que la matière qui les compose est soumise aux lois que nous avons reconnues, sans excep-

tion, dans les corps qui nous entourent, et qui ont pu être soumis à nos expériences. Or, s'il était possible de douter à priori que les corps célestes soient formés d'une matière qui jouisse de ces propriétés, l'accord entre les conséquences les plus minutieuses de cette hypothèse, et l'observation des faits en donnerait la preuve à posteriori.

Les mouvements des corps célestes, considérés relativement à la terre, sont très-compliqués; mais, rapportés au soleil, ils deviennent d'une extrême simplicité. Ils sont soumis à trois grandes lois, connues sous le nom de *lois de Képler*, et dont nous allons donner les énoncés, en considérant les planètes comme réduites à de simples points matériels :

1°. Les planètes, dans leur mouvement par rapport au soleil, décrivent des courbes planes; et leurs rayons vecteurs, partant du centre du soleil, décrivent des aires proportionnelles au temps;

2°. Les trajectoires relatives, ou les orbites des planètes, sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers;

3°. Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

Voyons quelles conséquences rigoureuses on peut tirer de ces lois.

Comme nous ne savons pas si le centre du soleil est immobile, il faut raisonner comme s'il était en mouvement. Or, l'expérience ayant démontré que les aires décrites par le rayon vecteur d'une planète autour du centre du soleil sont proportionnelles au temps, on en conclut, d'après la théorie du mouvement relatif, que la force relative qui sollicite cette planète est dirigée vers le centre du soleil, quelles que soient d'ailleurs la nature et la loi de cette force. Ce qui signifie, comme nous le savons, que si, à un instant

quelconque, on appliquait à la planète une force accélératrice égale, parallèle et de sens contraire à celle qui donnerait au soleil le mouvement qu'il a dans l'espace, la résultante de cette force et de celle qui est réellement appliquée à la planète est constamment dirigée vers le centre du soleil. Maintenant, la seconde loi de Képler, faisant connaître la trajectoire relative de la planète, va déterminer la fonction qui représente l'intensité de la force relative qui la fait décrire. Soient $2a$ le grand axe de cette ellipse, e son excentricité, r le rayon vecteur mené du centre du soleil à une position quelconque de la planète, et ω l'angle que forme son grand axe avec la ligne fixe passant par le centre du soleil, à partir de laquelle nous comptons les angles θ qui déterminent le rayon vecteur. L'équation de cette courbe sera

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Or, nous avons trouvé, pour l'expression générale de la force accélératrice φ, la formule suivante :

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

L'équation de la trajectoire que nous considérons donne

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Donc

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-e^2)},$$

et, par suite,

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\,\frac{1}{r^2}.$$

Cette valeur étant positive, il s'ensuit que le mouvement relatif d'une planète quelconque autour du soleil est produit par une force dirigée vers le centre de cet astre, et sa grandeur varie en raison inverse du carré de la distance à ce point.

Un calcul analogue conduirait à cette même loi si la trajectoire, au lieu d'être une ellipse, était une parabole ou une hyperbole.

14. Il reste encore à comparer les forces accélératrices qui agissent sur des planètes différentes placées à la même distance du soleil.

Or, à l'unité de distance, on a

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)},$$

c désignant le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps. Si donc T est le temps de la révolution entière, on aura

$$\tfrac{1}{2} c\mathrm{T} = \pi a^2 \sqrt{1-e^2},$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2},$$

à l'unité de distance du centre du soleil. Mais, d'après la troisième loi de Képler, le rapport $\frac{a^3}{\mathrm{T}^2}$ est le même pour toutes les planètes; donc la force qui sollicite l'unité de masse de chacune d'elles vers le centre du soleil est la même à la même distance de ce point.

Ainsi les mouvements relatifs des planètes sont dus à une force dirigée vers le centre du soleil, proportionnelle à la masse sur laquelle elle agit, et en raison inverse du carré de la distance à ce centre.

15. Mais il ne faut pas se méprendre sur le sens rigoureux de ces conséquences.

Les lois de Képler prouvent que, dans le mouvement relatif tel qu'il a lieu pour une planète quelconque, la force qui agit sur ce corps suit la loi que nous venons de déterminer; mais s'ensuit-il que cette loi serait la même pour un autre mouvement de la même planète? Par exemple, ce corps, placé sans vitesse à différentes distances du centre du soleil, serait-il attiré vers ce point en raison inverse du carré de la distance? Cela ne résulte nullement de la valeur trouvée pour φ, car elle aurait pu être exprimée en fonction de θ, et même de t; et l'on en aurait conclu, avec autant de raison, d'autres lois pour la force accélératrice. Ces lois auraient été prouvées pour le mouvement en question, mais non pour aucun autre; et il est évident que deux d'entre elles au moins ne sauraient être générales, puisque chacune d'elles exclut les autres.

Néanmoins, l'ensemble des résultats relatifs aux différentes planètes peut conduire à la connaissance de la loi générale que suit la force qui produit leurs mouvements. On reconnaît d'abord qu'elle ne peut dépendre du temps; car, pour chaque planète, la force serait exprimée par une fonction périodique, dont la période aurait la même durée que la révolution de cette planète; ce qui ne saurait être, puisque ces durées varient d'une planète à l'autre. On ne peut admettre non plus que la force dépende de la direction, car les calculs relatifs à chaque planète ne s'accorderaient pas à donner une même forme à cette fonction. Au contraire, tous ces mouvements conduisent à une même expression de la force accélératrice en fonction de la distance; on ne peut donc douter que ce ne soit là la vraie loi suivant laquelle la matière qui compose les planètes est attirée vers le centre du soleil, autant toutefois que les lois de Képler seront regardées comme exactes et immuables.

Cette action, dirigée constamment vers le centre du soleil, semble ne pouvoir être attribuée qu'à la matière même qui compose ce corps; et, si l'on étend aux corps célestes, agissant à distance les uns sur les autres, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, on doit admettre que le soleil est attiré vers chacune des planètes proportionnellement à leurs masses respectives. Mais le soleil attirant la matière de toute espèce qui compose toutes ces planètes placées si diversement par rapport à cet astre, il est impossible de se refuser à admettre qu'il attire aussi, de la même manière, les satellites de ces planètes; et, comme les rayons menés du centre du soleil aux différents points d'une planète et de ses satellites sont sensiblement égaux et parallèles, on peut regarder ce système comme sollicité par des forces parallèles et proportionnelles aux masses: d'où il résulte que l'action du soleil ne change pas sensiblement les mouvements relatifs d'une planète et de ses satellites.

Or les lois de Képler s'étendent à ces derniers mouvements; il s'ensuit donc, par les mêmes raisons déjà données pour les planètes relativement au soleil, que les satellites d'une même planète sont sollicités vers le centre de cette planète par des forces proportionnelles à leurs masses, et en raison inverse du carré de la distance à ce centre. Et d'après ce principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les satellites attirent leur planète commune, proportionnellement à leurs masses respectives et à la même fonction des distances.

Une planète attirant le soleil proportionnellement à la masse qu'elle possède, il est naturel d'admettre que toutes les parties qui la composent concourent à produire cette action dans la proportion de leurs propres masses, et qu'ainsi une molécule quelconque de cette planète attire le soleil dans le rapport de la masse de cette molécule à celle

de la planète. Il est aussi naturel d'admettre qu'il en est de même pour l'attraction qu'exerce la planète sur ses satellites, et qu'une molécule quelconque de cette planète attire un satellite dans le rapport de la masse de cette molécule à celle de la planète. Maintenant les satellites d'une même planète étant attirés par elle, proportionnellement à leurs masses, on en conclut encore que leur réaction, égale et contraire, est proportionnelle à leurs masses, et que, par conséquent, toutes les parties d'un satellite attirent proportionnellement à leurs propres masses. Enfin, par analogie, on étendra la même propriété à la matière du soleil, et l'on admettra que toutes les parties qui le composent attirent la matière proportionnellement à leurs propres masses, et en raison inverse du carré de la distance. En généralisant cette conception, on regardera comme une loi commune à toute la matière qui compose notre système planétaire, que deux molécules quelconques s'attirent l'une l'autre, proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse du carré de leur distance.

16. Si les corps célestes étaient exactement sphériques et formés de couches concentriques homogènes, nous avons démontré que, dans la loi d'attraction que nous admettons, ils agiraient les uns sur les autres comme si toute leur masse était réunie en leur centre. Il n'en sera pas tout à fait ainsi, parce que leur figure diffère un peu de celle de la sphère, mais il n'en résultera que des perturbations dont on ne doit pas tenir compte dans une première approximation. Nous considérerons donc le soleil, les planètes et leurs satellites comme des points matériels de masses différentes qui s'attirent tous proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse du carré de la distance.

L'attraction qu'éprouve une planète de la part des autres

corps du système, produit dans son mouvement autour du soleil des perturbations, qui sont l'objet principal de la mécanique céleste; nous ne nous en occuperons pas dans ce Cours, et nous considérerons ce mouvement pour chaque planète, dans la supposition où il résulterait de la seule action qui existe entre elle et le soleil.

Cela posé, désignons par f l'attraction mutuelle de deux unités de masse, supposées réduites à de simples points, et placées à une distance égale à l'unité de longueur. Soient M et m les masses du soleil et d'une planète; leur action mutuelle à la distance r aura pour expression $\frac{f\mathrm{M}m}{r^2}$. La force accélératrice sera pour la planète $\frac{f\mathrm{M}}{r^2}$, et pour le soleil $\frac{fm}{r^2}$; et pour chacun de ces deux points elle sera dirigée vers l'autre. Si donc on veut connaître le mouvement relatif de la planète autour du soleil, il faudra supposer qu'elle soit sollicitée par une force égale à la somme

$$\frac{f\mathrm{M}}{r^2}+\frac{fm}{r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{f(\mathrm{M}+m)}{r^2},$$

dirigée vers le soleil, que l'on considérera alors comme fixe; car, d'après la théorie générale du mouvement relatif, on doit appliquer au point dont on étudie le mouvement, une force accélératrice égale, parallèle, et de sens contraire à la force accélératrice qui agit sur l'autre; on peut ensuite considérer ce dernier comme fixe, et le mouvement de l'autre comme un mouvement absolu. Quant à la vitesse initiale qu'il faudra supposer au point mobile, elle sera la résultante de sa vitesse absolue initiale, et d'une vitesse égale parallèle et de sens contraire à celle de l'autre.

Or, dans le mouvement relatif d'une planète autour du

soleil, nous avons trouvé $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ pour l'expression de la force accélératrice relative, en supposant la distance égale à l'unité; nous aurons donc, d'après ce que nous venons d'établir,

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m).$$

On voit par là que $\frac{a^3}{T^2}$ dépendant de m doit varier d'une planète à l'autre, à moins qu'elles n'aient des masses égales, ce qui n'a aucune vraisemblance. Mais, comme l'observation a conduit Képler à regarder ce rapport comme le même pour toutes les planètes, on est obligé d'en conclure que le terme fm est une très-petite partie du second membre $f(M + m)$, et que par conséquent la masse m d'une planète quelconque est très-petite par rapport à la masse M du soleil. Nous verrons bientôt l'application de cette importante remarque.

17. Nous avons été conduit à la loi de l'attraction en faisant usage de formules générales relatives aux forces centrales; mais on pouvait y parvenir plus simplement par la seule considération de la force centripète. Avant d'exposer cette méthode, nous rappellerons quelques formules relatives à l'ellipse, et qui sont d'une application fréquente.

Soient a et b (*fig.* 3) les demi-axes d'une ellipse, c la distance du centre aux foyers. Joignons un point quelconque M de cette courbe aux foyers F, F'; abaissons de F, F' et du centre O, les perpendiculaires FP, F'P', OQ sur la tangente en M, et tirons la normale MN. Posons

$$FM = \delta, \quad F'M = \delta', \quad FP = p, \quad F'P' = p',$$
$$OQ = q, \quad MN = n, \quad NMF = \omega;$$

on obtiendra facilement les formules suivantes :

$$FN = \frac{c\delta}{a}, \quad F'N = \frac{c\delta'}{a}, \quad p = b\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}, \quad p' = b\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}},$$

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'}, \quad \cos\omega = \sin FMP = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}}, \quad q = \frac{p+p'}{2} = \frac{ab}{\sqrt{\delta\delta'}} = \frac{b^2}{n}.$$

De ces équations on tire

$$pp' = b^2, \quad qn = b^2,$$

et, par suite,

$$pp' = qn, \quad \text{ou} \quad p : n :: q : p'.$$

La proportion $p : n :: q : p'$ résulte aussi de ce que les deux quadrilatères FPMN et OQP'F' sont semblables, par suite du parallélisme des lignes FM, OP'.

Dans toutes les sections coniques, le rayon de courbure R est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre. En effet, abaissons les perpendiculaires MI, M'I' sur les rayons menés à deux points infiniment voisins M, M'; $\frac{M'I}{MI'}$ a pour limite 1, donc aussi $\frac{MI}{M'I'}$. Donc, en désignant par α, α' les angles MF'M', MFM', on aura

$$\alpha' = \alpha\frac{\delta'}{\delta}.$$

Mais

$$2O' = \alpha + \alpha' = \alpha\left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right) = \frac{2a\alpha}{\delta}, \quad \text{ou} \quad O' = \frac{a\alpha}{\delta}.$$

Or

$$R = \frac{MM'}{O} = \frac{MM'\delta}{\alpha a}, \quad \alpha = \frac{MI}{\delta'} = \frac{MM'}{\delta'}\cos\omega;$$

donc

$$R = \frac{\delta\delta'}{a\cos\omega} = \frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2 n^3}{b^4}.$$

On reconnaît encore immédiatement que la projection de la normale sur l'un des rayons vecteurs, ou $n \cos \omega$, est égale au demi-paramètre $\frac{b^2}{a}$.

On voit aussi que la projection du rayon de courbure sur un des rayons vecteurs, ou $R \cos \omega$, est égale à $\frac{\delta\delta'}{a}$, quatrième proportionnelle, que l'on construira immédiatement, de manière que M soit une de ses extrémités, et l'autre en un certain point de MF'. Élevant en ce point une perpendiculaire à MF', elle rencontrera la normale au centre de courbure. Mais on arrivera encore à une construction plus simple indiquée par Newton, en observant qu'on a

$$R \cos \omega = \frac{n}{\cos \omega}.$$

D'où il suit que si par le pied de la normale on lui élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre d'un des rayons vecteurs, et que par ce point de rencontre on en élève une autre à ce rayon vecteur, cette dernière ligne coupera la normale au centre de courbure.

18. Revenons maintenant à la question de mécanique. Les aires étant proportionnelles au temps, la force qui produit le mouvement relatif autour du soleil passe par le centre de cet astre; et il s'agit de trouver la loi de cette force, sachant que la courbe décrite est une ellipse dont le centre du soleil occupe un foyer.

Désignons par φ la force accélératrice appliquée au point matériel M et dirigée suivant MF; sa composante suivant la normale MN sera $\varphi \cos \omega$, et son expression sera $\frac{v^2}{R}$, v désignant la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du mobile. Si maintenant on désigne

par C le double de l'aire constante décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps, le double de celle qu'il décrira dans le temps dt sera Cdt. Or, cette aire est un triangle ayant pour base l'arc ds décrit dans le temps dt, et pour hauteur p. On aura donc

$$pds = Cdt, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{C}{p},$$

et, par suite,

$$\varphi \cos\omega = \frac{v^2}{R} = \frac{C^2}{p^2 R}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{C^2}{p^2 R \cos\omega},$$

formules applicables à toute courbe; et, remettant pour p, R et cos ω, leurs valeurs en δ et δ',

$$\varphi = \frac{C^2 a}{b^2 \delta^2}.$$

Ce qui prouve que la force est en raison inverse du carré de la distance au centre du soleil.

On peut exprimer la constante C au moyen du temps T de la révolution de la planète autour du Soleil; car le double de l'aire de l'ellipse étant $2\pi ab$, on aura

$$CT = 2\pi ab;$$

donc

$$C = \frac{2\pi ab}{T},$$

et

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\delta^2};$$

de sorte que la force accélératrice à l'unité de distance est $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$.

On retombe ainsi sur les résultats trouvés précédemment

Si la force était dirigée vers le centre O, on aurait

$$v = \frac{C}{q}\,\varphi = \frac{C^2}{q^2 R \cos\omega} = \frac{C^2.OM}{q^3 R} = \frac{C^2\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}{q^3 n^3}.OM = \frac{C^2}{a^2 b^2}.OM,$$

résultat identique avec celui que nous avons déjà trouvé par l'analyse (*voir* page 6).

19. Avant d'obtenir la démonstration de la loi de l'attraction des planètes, Newton l'avait entrevue par des considérations que nous allons indiquer, et qui, sans avoir le même degré de rigueur, ne laissaient pas que de donner de très-fortes inductions.

Les planètes décrivant des orbites d'excentricités différentes, on peut supposer, par analogie, que les lois de Képler, qui leur sont communes, s'appliqueraient encore au cas d'orbites circulaires : d'autant plus que les orbites réelles étant très-peu excentriques, on peut avec une assez grande approximation les regarder comme circulaires. Ainsi, on aura des résultats, sinon exacts, au moins fort approchés, en appliquant les lois de Képler au cas d'orbites circulaires. Cela posé, la loi des aires indique toujours que la force qui agit sur chaque planète est dirigée vers le centre du Soleil. La seconde loi, qui, dans le cas général, prouvait que, pour la même planète, la force accélératrice variait en raison inverse du carré de la distance, montre, dans le cas actuel, que la vitesse est constante ; car les arcs de cercle sont proportionnels aux secteurs et, par suite, au temps ; ou encore la force est toujours normale à la trajectoire, et, par conséquent, la vitesse est invariable. Or, la force centripète, appliquée à l'unité de la masse, a pour valeur $\frac{v^2}{R}$, v étant

la vitesse, et R le rayon du cercle; elle est donc constante. Ainsi, dans ce cas particulier, comme on devait le prévoir, la seconde loi n'apprend rien relativement à la variation de la force avec la distance; mais elle en donne toujours l'expression, au moyen du temps T de la révolution entière de la planète et du rayon de son orbite. On a, en effet, $2\pi R = v T$, et, par conséquent, en désignant par φ la force centripète $\frac{v^2}{R}$, en substituant à v sa valeur en fonction de R et T, on aura

$$\varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2};$$

ce qui s'accorde avec la valeur générale $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, dans laquelle on supposerait $r = a = R$.

Passons maintenant à la troisième loi, qui, dans le cas général, étendait la loi d'attraction trouvée pour les diverses positions sur une même orbite, aux positions relatives à des orbites différentes. Dans le cas actuel, le résultat analogue que nous allons trouver ne sera pas une extension, mais bien la première manifestation de cette même loi. Soient φ, φ' les forces accélératrices relatives à deux planètes quelconques, dont les distances au Soleil sont R, R', et les durées des révolutions T, T'. On aura, d'après les valeurs de φ et φ',

$$\varphi : \varphi' :: \frac{R}{T^2} : \frac{R'}{T'^2};$$

or, la troisième loi de Képler donne

$$T^2 : T'^2 :: R^3 : R'^3.$$

Remplaçant, dans le second rapport de la proportion précédente, T^2 et T'^2 par les quantités proportionnelles

R^3, R'^3, elle devient

$$\varphi : \varphi' :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2};$$

ce qui prouve que la force appliquée à l'unité de masse varie en raison inverse du carré de la distance au centre du Soleil.

Les satellites d'une même planète étant soumis aux mêmes lois, relativement à leur planète, on en concluait que l'attraction des satellites varie de même en raison inverse du carré de la distance au centre de la planète autour de laquelle ils opèrent leur mouvement. La terre, n'ayant qu'un satellite, ne pouvait fournir une vérification semblable de cette loi d'attraction; mais elle en donnait une autre qui n'a pas échappé à Newton. En effet, si de l'ensemble des phénomènes précédents on tire, comme nous l'avons déjà fait ci-dessus, la conséquence que deux molécules quelconques de matière s'attirent, proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse du carré de leur distance, la terre pouvant être considérée comme composée de couches concentriques homogènes, son action sur un point situé à sa surface ou au delà est la même que si toute sa masse était réunie à son centre. Or, la distance des centres de la lune et de la terre ayant pour valeur moyenne soixante rayons célestes, la pesanteur à la surface de la terre doit être 3600 fois plus grande que l'attraction exercée par la terre sur une même masse située sur la lune : ce même rapport doit donc exister entre les espaces parcourus dans un même temps par les corps tombant à la surface de la terre, et par la lune dans le sens de l'attraction de la terre.

Or, cette vérification, bien facile à faire, réussit complétement.

En effet, si, pour simplifier le calcul, nous considérons

l'ellipse très-peu excentrique que décrit la lune, comme un cercle dont le rayon R soit égal à 60 fois le rayon r de la terre, supposée sphérique, la force centripète représentera l'action g' de la terre. Cette dernière est donc égale à $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$, T étant la durée de la révolution de la lune autour de la terre, dont la valeur en secondes est 39343×60; on aura donc

$$g' = \frac{4\pi^2 r}{60\,(39343)^2};$$

et, comme $2\pi r = 40000000$, il vient

$$g' = \frac{40000000\,\pi}{3.(39343)^2};$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de $\frac{g}{3600}$; et l'on ne trouverait aucune erreur appréciable en ayant égard à diverses circonstances que nous avons négligées.

Le résultat de ce calcul fournissait donc une confirmation de cette supposition, que toutes les molécules de la matière s'attirent proportionnellement aux masses et en raison inverse du carré de la distance, et que la pesanteur à la surface de la terre est un effet de cette attraction, aussi bien que la pesanteur à laquelle la lune est soumise vers le même centre.

20. *Masses des planètes.* — Il est facile de déterminer le rapport de la masse d'une planète à celle du soleil, lorsque cette planète est accompagnée d'un satellite ayant une masse relativement très-petite. En effet, représentons par M la masse du soleil, par m, m' celles de la planète et de son satellite, par $2a$, $2a'$ les grands axes des orbites de la planète et du satellite, et par T, T' les temps de leurs révo-

lutions; on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m + m');$$

d'où

$$\frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2} = \frac{m + m'}{M + m}.$$

Or, le second membre peut être regardé comme sensiblement égal à $\frac{m}{M}$, parce que m est très-petit par rapport à M, ainsi que m' par rapport à m. On peut donc écrire

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

T et T' sont connus par l'observation, et il suffit de connaître une valeur approchée de $\frac{a'}{a}$ pour en déduire, avec une approximation du même ordre, le rapport de la masse de la planète à celle du soleil. Newton a trouvé, par ce procédé, $\frac{1}{1067}$ pour le rapport de la masse de Jupiter à celle du soleil. Des procédés plus précis ont donné $\frac{1}{1050}$, ce qui en diffère très-peu.

21. La masse de la terre ne peut se déterminer très-exactement par la méthode que nous avons indiquée pour les planètes qui ont des satellites, parce que la masse de la lune ne peut être négligée par rapport à celle de la terre; néanmoins cette méthode donnera un moyen de vérification lorsque l'on connaîtra le rapport de ces deux masses. Mais on peut parvenir à connaître la masse de la terre par un autre moyen qui ne saurait être employé pour aucune autre planète, et qui résulte de la connaissance que nous avons

de l'attraction qu'elle exerce sur les corps situés à sa surface. Cette attraction est égale à la pesanteur, augmentée de la composante verticale de la force centrifuge. De plus, il faut avoir égard à l'aplatissement de la terre, et l'on trouve que, sur le parallèle dont le carré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$, et dont la distance r au centre de la terre a pour valeur $r = 6364551$, l'attraction G de la terre est sensiblement la même que si elle était sphérique et qu'elle eût r pour rayon. En la calculant d'après la loi de la variation de la pesanteur à la surface de la terre (*Mécanique céleste*), on trouve qu'elle a pour valeur 9,81645, ce qui est un peu supérieur à g.

Si donc on désigne par m la masse de la terre, et par f l'attraction mutuelle de deux unités de masse placées à l'unité de distance l'une de l'autre, on aura

$$G = \frac{fm}{r^2} = 9,81645.$$

On peut tirer de là la valeur de f, et la reporter dans la formule $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m)$ qui se rapporte au mouvement de la terre autour du soleil. Il en résulte

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{Gr^2(M + m)}{m};$$

d'où

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gr^2T^2} - 1.$$

Mais on a

$$T = 86400.(365,256374),$$

et la valeur de la parallaxe du soleil donne

$$a = 23984.r;$$

en effectuant les calculs, on trouvera

$$\frac{M}{m} = 354592, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{354592}.$$

Il est facile de déduire de là le rapport de la densité de la terre à celle du soleil. En effet, le diamètre du soleil est égal à 110 fois celui de la terre, et les densités de deux corps sont entre elles comme leurs masses divisées par leurs volumes; d'où l'on conclut facilement que la densité de la terre est à peu près quadruple de celle du soleil.

Si, d'après cela, on calcule la pesanteur à la surface du soleil, on trouve qu'une même masse y pèse 29 fois et demie autant qu'elle pèserait à la surface de la terre; et que les corps, abandonnés à la libre action de cette force, y parcourent un espace d'environ 145 mètres dans la première seconde, tandis qu'à la surface de la terre l'espace qu'ils parcourent dans le même temps n'est que $\frac{g}{2}$.

22. Les masses des planètes qui n'ont pas de satellites ne peuvent être déterminées par le procédé du nº 18, et l'on a recours, pour cela, aux perturbations que leurs actions mutuelles introduisent dans leur mouvement autour du soleil. L'action d'une planète étant proportionnelle à sa masse, on conçoit à priori que le trouble apporté par cette action dans un mouvement produit par celle du soleil peut conduire à la connaissance du rapport de la masse de cette planète à celle du soleil. Cette importante question est du ressort de la mécanique céleste, et nous nous bornons à l'indiquer. Ce procédé peut s'appliquer également aux planètes qui ont des satellites, et c'est ainsi qu'on a trouvé $\frac{1}{1050}$ pour la masse de Jupiter.

Les masses des satellites d'une même planète pourront de même être comparées à celles de leur planète au moyen

des perturbations que leurs actions mutuelles apportent à leur mouvement autour de cette planète, et l'on en déduira leurs rapports à la masse du soleil, puisqu'on connaît celui de la masse de la planète à celle du soleil. Il y aurait encore ici une exception pour la terre qui n'a qu'un satellite; mais on a encore ce même avantage dont on a profité dans la recherche de la masse de la terre; c'est la connaissance de ce qui se passe à sa surface. En effet, la lune produit à cette surface des perturbations provenant de l'inégalité des distances de ce satellite aux différents points de la terre. Ces perturbations sont le flux et le reflux de la mer. Comme le soleil produit sur la mer des effets semblables, on conçoit que la comparaison de ces deux effets doit conduire au rapport des masses de la lune et du soleil. Or, cette comparaison est facile par l'observation des marées lunaires et solaires dont les lois sont différentes. Nous nous bornerons à dire que le rapport de la première à la seconde est, dans le port de Brest, 2,3533 (*Mécanique céleste*); par un calcul que nous ne rapporterons pas, on en déduit le rapport de la masse de la lune à celle du soleil, et, par suite, à celle de la terre. On trouve ainsi que la masse de la lune est $\frac{1}{71}$ de celle de la terre.

En considérant la terre et une autre planète quelconque dont m_1 soit la masse, T_1 le temps de la révolution, et a_1 le demi-grand axe de l'orbite, on obtiendra l'équation

$$\frac{a_1^3 T^2}{a^3 T_1^2} = \frac{M + m_1}{M + m}.$$

Si donc m_1 et T_1 sont connus, on déterminera le rapport $\frac{a_1}{a}$, et, par suite, a_1, puisque a est connu. Cette équation ne serait pas propre à faire connaître m_1, parce qu'une erreur dans le premier membre, de l'ordre de celle que nous avons pu admettre dans le n° 18, où le second membre

était $\frac{m_1}{M}$, en produirait ici une beaucoup plus considérable sur ce rapport qui n'est qu'une très-petite partie du second membre, de sorte que l'erreur pourrait être comparable à la quantité inconnue.

23. Jusqu'ici nous n'avons déterminé que les rapports des masses des planètes et du soleil; mais on peut obtenir une valeur approchée de celle de la terre, et toutes les autres s'ensuivront. Il suffit, pour cela, de connaître le rapport de l'attraction exercée par une masse connue sur un corps quelconque à une distance donnée, au poids de ce corps; et c'est à quoi l'on peut parvenir, soit par l'équilibre, soit par des mouvements oscillatoires : nous nous contenterons de donner une idée du premier moyen.

Supposons une boule d'un petit diamètre suspendu par un fil dont la longueur est l et soumis à l'action d'une sphère ayant pour rayon R, pour densité D, et son centre dans le plan horizontal mené par l'extrémité du pendule, à une distance a de ce point. Soient d et r la densité moyenne et le rayon de la terre, et α l'angle formé avec la verticale par le pendule en équilibre.

L'attraction exercée par la sphère sur la petite boule dont nous désignerons la masse par m, sera $\frac{4}{3}\pi\frac{R^3 D fm}{a^2}$, et son bras de levier $l\cos\alpha$. L'attraction exercée par la terre sera $\frac{4}{3}\pi rdfm$, et son bras de levier $l\sin\alpha$. Les moments de ces deux forces devant être égaux pour l'équilibre, on en conclut, en supprimant les facteurs communs,

$$\frac{R^3 D}{a^2}\cos\alpha = rd\sin\alpha, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{R^3 D}{a^2 rd}.$$

Si donc on peut observer l'angle α, qui sera nécessairement très-petit, tout sera connu dans cette équation, excepté d qui se trouvera déterminé.

Une observation de ce genre faite par Maskeline, en Écosse, dans le voisinage d'une montagne dont il avait évalué approximativement la masse et la distance moyenne, lui a donné, pour la densité moyenne de la terre, une valeur égale à quatre ou cinq fois celle de l'eau.

Une expérience faite par Cavendish, et dans laquelle l'attraction d'une sphère connue produisait des oscillations dont on pouvait déterminer la durée, a donné à la terre une densité égale à cinq fois et demie celle de l'eau.

La densité moyenne de la terre étant connue avec assez d'approximation, on en conclut sa masse ainsi que celle des autres planètes et du soleil.

CHAPITRE XII.

CALCUL DU MOUVEMENT DES PLANÈTES AUTOUR DU SOLEIL.

24. Nous avons reconnu que les mouvements des planètes autour du soleil sont produits par une force attractive, agissant en raison inverse du carré de la distance; et que la loi de la force serait encore la même si les trajectoires, au lieu d'être des ellipses, étaient des paraboles ou des hyperboles. Nous allons maintenant traiter la question inverse; nous considérerons une force dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance, et nous nous proposerons de déterminer de la manière la plus générale les trajectoires qu'elle peut faire décrire au point attiré, et la position de ce point à chaque instant.

Il y a deux cas à examiner, suivant que le centre d'attraction est fixe ou mobile. Il est d'ailleurs très-facile de faire rentrer le second cas dans le premier, en supposant que les deux points ne soient soumis qu'à leur action mutuelle, et en outre à des forces accélératrices égales et parallèles, qui

ne pourront avoir aucune influence sur les mouvements relatifs.

En effet, soit P l'action mutuelle des deux points dont les masses sont respectivement M et m; la force accélératrice appliquée au point m sera $\frac{P}{m}$. Si donc on cherche le mouvement relatif de m autour de M, il faut supposer ce dernier point immobile, et considérer le premier comme attiré vers lui par une force accélératrice égale à

$$\frac{P}{m}+\frac{P}{M}, \quad \text{ou} \quad P\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right).$$

Quant à la vitesse initiale qu'il faudra attribuer à m, elle résultera de la composition de sa vitesse initiale absolue et de celle de M prise en sens contraire.

Ainsi, le mouvement relatif de deux points qui s'attirent suivant une loi quelconque, est ramené au mouvement absolu d'un point attiré vers un centre fixe par une force qui suit la même loi, et ne diffère de la première que par un coefficient constant.

25. Nous pouvons donc nous placer dans l'hypothèse d'un centre d'action immobile, et nous représenterons par $\frac{\mu}{r^2}$ la force accélératrice qu'il produit sur le mobile. Les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

Les principes des aires et des forces vives donnent les deux intégrales premières

$$(1) \qquad r^2 d\theta = c dt,$$

$$(2) \qquad \frac{dr^2}{dt^2}+\frac{r^2 d\theta^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r}+b=v^2,$$

b et c étant des constantes arbitraires.

Éliminant dt entre ces deux équations, on aura

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + b;$$

c'est là ce qu'aurait donné l'équation (3) du n° 1, en y supposant $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$.

Elle devient, en posant $\frac{1}{r} = z$,

$$(3) \qquad \frac{c^2 dz^2}{d\theta^2} = -c^2 z^2 + 2\mu z + b.$$

Cherchons d'abord les valeurs des constantes b et c, en supposant qu'on donne la position initiale du point, ainsi que la grandeur et la direction de sa vitesse initiale. Si l'on désigne par r_0 et v_0 les valeurs initiales de r et de v, l'équation (2) donnera

$$b = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}.$$

Quant à la constante c, nous avons déterminé généralement sa valeur dans le n° 1 ; elle est

$$c = r_0 v_0 \sin \alpha,$$

α désignant l'angle que la direction de la vitesse fait avec le rayon vecteur au commencement du mouvement. Les deux constantes b et c sont donc déterminées.

26. Pour connaître l'équation finie de la trajectoire, il faut intégrer l'équation (3) qui peut se mettre sous la forme

$$d\theta = \frac{\pm dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2} z + \frac{b}{c^2}}},$$

et il s'agit d'abord de savoir lequel des deux signes il convient de prendre.

Nous considérerons $d\theta$ comme toujours positif; dz sera positif quand le rayon vecteur décroîtra lorsque θ croîtra, et négatif dans le cas contraire; dans le premier cas, on prendra le signe $+$ pour le second membre de l'équation, et le signe $-$ dans le second cas, le radical étant toujours considéré comme positif.

Il faut donc d'abord chercher où ont lieu les changements de signe de dz; ils correspondent aux valeurs maxima ou minima de z, et on les obtient en posant

$$\frac{dz}{d\theta}=0, \quad \text{ou} \quad c^2z^2-2\mu z-b=0;$$

d'où

$$z=\frac{\mu}{c^2}\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{b}{c^2}}.$$

Lorsque z passera par l'une quelconque de ces valeurs, on devra changer le signe de dz et le conserver jusqu'à ce que z arrive à l'autre valeur; alors on changera de nouveau le signe de dz, et ainsi de suite indéfiniment.

Supposons, pour fixer les idées, qu'à partir de la position initiale correspondante à $r=r_0$, les rayons commencent par croître, c'est-à-dire que l'angle α soit aigu : alors, dz étant négatif, on a

$$(4)\quad d\theta=\frac{-dz}{\sqrt{-z^2+\frac{2\mu}{c^2}z+\frac{b}{c^2}}}=\frac{-dz}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4}+\frac{b}{c^2}-\left(z-\frac{\mu}{c^2}\right)^2}};$$

d'où l'on tire, en intégrant à partir des valeurs θ_0 et z_0 relatives à la position initiale,

$$\theta-\theta_0=\text{arc cos}\frac{c^2z-\mu}{\sqrt{\mu^2+bc^2}}-\text{arc cos}\frac{c^2z_0-\mu}{\sqrt{\mu^2+bc^2}}.$$

Si l'on pose $\theta_0 - \arccos \frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}} = \theta_1$, la valeur de θ sera donnée par l'équation suivante :

$$(5) \qquad \theta - \theta_1 = \arccos \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}}.$$

Mais il y a une observation importante à faire dans les intégrations où entrent des arcs de cercle, et qui se rapportent aux limites entre lesquelles les différentielles conservent la même expression. Ainsi, par exemple, la différentielle de arc cos u est $\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$ quand l'arc a son sinus positif; elle est, au contraire, $\frac{+du}{\sqrt{1-u^2}}$ quand le sinus est négatif.

L'équation (5) n'est donc exacte qu'en supposant, comme on peut toujours le faire, que l'on prenne, pour la valeur initiale de l'arc qui y entre, une quantité comprise entre o et π; et l'on pourra l'employer tant que la valeur croissante de cet arc restera comprise dans les mêmes limites, c'est-à-dire jusqu'à la valeur de z, pour laquelle on aura

$$\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}} = -1, \quad \text{ou} \quad z = \frac{\mu}{c^2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}};$$

et quand z aura passé par cette valeur, il faudrait changer de signe le second membre de l'équation (4) pour qu'il fût toujours la différentielle de l'arc. Mais cette valeur de z est précisément l'une de celles où l'on doit changer de signe le second membre de cette équation pour qu'il soit le même que celui du premier. Donc l'équation (5) subsiste au delà de cette valeur, et jusqu'à ce que l'arc soit devenu égal à 2π, puisqu'alors le sinus redevenant positif, on devra

changer le signe de dz pour avoir encore la différentielle de l'arc. Or, quand cet arc devient 2π, son cosinus devient 1, et l'on a

$$z = \frac{\mu}{c^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}};$$

et c'est encore là une valeur de z après laquelle on doit changer le signe de dz pour que les deux membres de l'équation (4) soient de même signe. Donc enfin, dans toute l'étendue du mouvement, l'équation (5) subsiste sans aucune modification. Et la discussion serait entièrement semblable si l'on avait supposé l'angle α obtus, c'est-à-dire si les rayons commençaient par décroître : l'arc se trouverait avec un signe contraire dans l'équation (5), et cette forme devrait être conservée dans toute l'étendue du mouvement. Ce changement de signe donnerait pour θ_1 une valeur différente de la précédente ; mais, à cela près, le résultat ne différerait pas de celui que nous allons déduire de l'équation (5).

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}} = \cos(\theta - \theta_1);$$

remettant pour z sa valeur $\frac{1}{r}$, on obtient

$$(6) \qquad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{bc^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_1)}.$$

Cette équation est celle d'une section conique dont le pôle occupe un foyer. Elle représentera une ellipse si b est négatif, une parabole s'il est nul, et une hyperbole s'il est positif.

En effet, l'équation d'une ellipse rapportée à un de ses

foyers est

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega} = \frac{p}{1+e\cos\omega},$$

ω désignant l'angle formé par le rayon vecteur avec l'axe de la courbe, du côté du sommet le plus voisin du foyer; a, e et p représentent le demi-grand axe, l'excentricité et le demi-paramètre. Les deux équations deviennent identiques, si l'on pose

$$(7) \qquad \theta - \theta_1 = \omega, \quad e^2 = 1 + \frac{bc^2}{\mu^2}, \quad a(1-e^2) = p = \frac{c^2}{\mu}.$$

La seconde de ces équations ne peut avoir lieu que si b est négatif, puisque dans l'ellipse on a $e < 1$. Dans ce cas, e est déterminé par cette équation, et est réel, puisque le second membre est positif; a est déterminé par la dernière, et la première apprend que θ_1 est l'angle formé avec l'axe des x par l'axe de l'ellipse, du côté du sommet le plus voisin de l'origine des coordonnées.

L'équation d'une parabole dont le paramètre est $2p$ est $r = \frac{p}{1+\cos\omega}$, les angles étant comptés à partir de la droite menée du foyer au sommet. L'équation (6) sera identique avec elle si l'on a

$$\theta - \theta_1 = \omega, \quad b = 0, \quad p = \frac{c^2}{\mu}.$$

Ainsi, dans le cas de $b = 0$, la trajectoire est une parabole dont l'axe est la droite menée par l'origine, et faisant l'angle θ_1 avec l'axe des x; le sommet est du côté correspondant à cette direction, et le paramètre est $\frac{2c^2}{\mu}$.

Enfin, si l'on a $b > 0$, l'équation (6) pourra être identifiée avec la suivante :

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\omega} = \frac{p}{1+e\cos\omega},$$

dans laquelle e est supposé plus grand que l'unité, et qui représente une branche d'hyperbole, dans l'intérieur de laquelle est le foyer pris pour pôle : les angles ω sont comptés à partir de la droite menée du foyer au sommet de cette branche. Il suffira, pour établir l'identité des deux équations, de poser

$$\theta - \theta_1 = \omega, \quad e^2 = 1 + \frac{bc^2}{\mu^2}, \quad a(e^2 - 1) = p = \frac{c^2}{\mu}.$$

Ces équations déterminent e et a, et, par conséquent, dans le cas de $b > 0$, la trajectoire est une branche d'hyperbole dont l'origine occupe le foyer, et dont l'axe fait un angle θ_1 avec l'axe des x.

On voit par ce qui précède que, quelle que soit la section conique décrite en vertu de la force centrale, on a toujours $p = \frac{c^2}{\mu}$, p désignant son demi-paramètre. Ainsi la constante c, ou le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur du mobile, est toujours proportionnelle à la racine carrée du paramètre de sa trajectoire : elle est égale à cette racine multipliée par $\sqrt{\mu}$.

27. On peut facilement obtenir l'équation de la trajectoire en cordonnées rectangles, et l'on retrouvera les résultats que nous venons de déduire de l'équation polaire. On prendra pour axe des x la droite menée de l'origine sous l'angle θ avec l'axe des x; ce qui donnera

$$x = r\cos(\theta - \theta_1), \quad y = r\sin(\theta - \theta_1), \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Éliminant $\cos(\theta - \theta_1)$ entre la première de ces équations et l'équation (6), on obtient

$$r = \frac{c^2}{\mu} - x\sqrt{1 + \frac{bc^2}{\mu^2}},$$

d'où l'on déduit

$$\mu^2 y^2 - bc^2 x^2 + 2c^2 x\sqrt{\mu^2 + bc^2} = c^4,$$

équation qui représente une ellipse si b est négatif, une parabole s'il est nul, et une hyperbole s'il est positif. Dans les trois cas, l'axe sur lequel sont comptés les x est un axe de la courbe, et l'origine est un foyer, puisque la valeur de r en fonction de x est rationnelle.

On peut observer que la nature de la trajectoire ne dépendant que de b, dont la valeur est $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$, ne dépend que de la distance initiale et de la grandeur de la vitesse initiale, mais nullement de la direction de cette vitesse. Ce résultat coïncide avec celui que nous avions déjà obtenu par une autre voie.

L'équation de la trajectoire étant connue, il ne reste plus qu'à déterminer les coordonnées du mobile en fonction de t : c'est là ce que l'on appelle ordinairement le problème de Képler.

Nous ferons le calcul dans le cas où la courbe est une ellipse, comme cela a lieu pour toutes les planètes : nous la rapporterons à des coordonnées polaires r, θ, et nous compterons les angles à partir de la direction de la droite qui va du foyer au sommet le plus voisin. Cela revient à supposer $\theta_1 = 0$, ou $\omega = \theta$; nous aurons alors

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta},$$

dans laquelle a et e sont des quantités que nous avons déterminées d'après les données initiales.

Si l'on élimine une des deux quantités θ et r entre les équations (1), (2), on en obtiendra une entre t et l'une des coordonnées; en l'intégrant, on connaîtra cette coordonnée en fonction de t, et l'autre coordonnée s'en déduira en fonction de t, d'après l'équation de la trajectoire.

Éliminant ainsi $d\theta$, on obtient

$$\frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + b;$$

d'où

$$dt = \pm \frac{rdr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}}.$$

Si l'on prend pour origine des temps l'instant où l'on a $\theta = 0$, la planète est au sommet le plus voisin du foyer, qui correspond à $r = a(1 - e)$, et qu'on nomme le *périhélie*. Le point diamétralement opposé de l'ellipse se nomme l'*aphélie*; le rayon vecteur est alors à sa plus grande valeur, dont l'expression est $r = a(1 + e)$. D'après cela, dr est positif depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, et négatif depuis ce dernier point jusqu'au retour au périhélie. Ainsi, dans la première moitié de la trajectoire, on doit prendre l'équation

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}},$$

et dans l'autre moitié, on changera le signe du second membre. On intégrerait facilement cette expression au moyen d'un arc de cercle et d'un radical algébrique. Cette forme serait peu favorable au calcul de o en fonction de t; et il est plus convenable d'introduire une nouvelle variable au lieu de r.

Si l'on observe que r est toujours compris entre $a(1 - e)$ et $a(1 + e)$, on voit qu'on peut poser

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Cet angle u passe en même temps que θ par les valeurs 0, π, 2π; on lui a donné le nom d'*anomalie excentrique*; et l'angle θ s'appelle *anomalie vraie* de la planète.

L'équation de l'ellipse étant d'ailleurs

$$r = a - ex,$$

x étant l'abscisse comptée à partir du centre, on voit (*fig.* 4) que u n'est autre chose que l'angle AON, N étant le point du cercle décrit sur le grand axe, qui a la même abscisse que le point M de l'ellipse.

En faisant cette substitution dans la valeur de dt, et remettant, au lieu des constantes b, c, leurs valeurs tirées des équations (7), qui sont

$$b = -\frac{\mu}{a}, \quad c^2 = \mu a(1 - e^2),$$

il vient

$$dt = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}.(1 - e\cos u)\,du.$$

Si l'on intègre cette équation, en observant qu'on a en même temps $t = 0$, $u = 0$, et si l'on fait, pour abréger, $a\sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{1}{n}$, on obtient

$$nt = u - e\sin u;$$

cette équation détermine u en fonction de t, et l'on aura ensuite r au moyen de l'équation

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Enfin θ sera connu d'après l'équation de la trajectoire. On aura d'abord, en égalant les deux valeurs de r,

$$1 - e\cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta},$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u};$$

par suite,

$$1 + \cos\theta = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e\cos u},$$

$$1 - \cos\theta = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e\cos u};$$

et, divisant ces deux équations membre à membre,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u;$$

prenant les racines avec le même signe, puisque u et θ sont nuls en même temps, on a

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u.$$

On pourrait encore obtenir directement cette valeur de θ en fonction de u. En effet,

$$d\theta = \frac{cdt}{r^2} = \frac{cdr}{r\sqrt{br^2+2\mu r-c^2}} = \frac{du}{1-e\cos u}\sqrt{1-e^2}.$$

Pour intégrer cette équation, on posera

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u = z,$$

ce qui donnera

$$\frac{du}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = 2\,dz;$$

observant ensuite que l'on a

$$\cos u = \cos^2 \tfrac{1}{2} u - \sin^2 \tfrac{1}{2} u,$$

il viendra

$$d\theta = \frac{2\,dz\sqrt{1-e^2}}{1-e+(1+e)z^2},$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}\theta = \operatorname{arc\,tang} z\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + c_1.$$

La constante c_1 est nulle, puisqu'on doit avoir en même temps $\theta = 0$, $z = 0$; on aura donc

$$z\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta,$$

ou

$$\tang \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\tang \tfrac{1}{2}u.$$

La coordonnée θ est donc connue en fonction de u et, par suite, de t.

28. La durée T de la révolution de la planète se déduira de l'équation $nt = u - e\sin u$, en y faisant $u = 2\pi$, ce qui donne $T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}}$.

C'est aussi la valeur que l'on obtiendrait en divisant l'aire de l'ellipse par celle que décrit le rayon vecteur pendant l'unité de temps, et dont la valeur est $\frac{1}{2}c$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}$. En effet, les demi-axes de l'ellipse étant a et $a\sqrt{1-e^2}$, son aire est égale à $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$; et si on la divise par $\frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, on trouve $2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}}$.

Quant à la vitesse en chaque point, elle est donnée par l'équation $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, qui se déduit de la formule (2) en y remplaçant b par sa valeur $-\frac{\mu}{a}$.

29. Les formules précédentes qui expriment t, θ au moyen de la variable auxiliaire u, peuvent facilement être démontrées géométriquement.

Soient O (*fig.* 4) le centre de l'ellipse, F le foyer que l'on considère, M un point quelconque de la courbe, N le point où l'ordonnée MP prolongée rencontre le cercle décrit sur le grand axe AA' comme diamètre; on aura

$$MFA = \theta,\quad MF = r,\quad OF = ae,\quad \frac{MP}{NP} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}.$$

Cherchons d'abord t en fonction de u; et, pour cela, considérons le secteur elliptique MFA décrit pendant le

temps t. Le double de l'aire décrite dans l'unité de temps ayant été désigné par c dont la valeur est, comme nous l'avons vu, $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, on aura

$$\text{sect. MFA} = \tfrac{1}{2} t \sqrt{\mu a (1-e^2)} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{2} t,$$

en faisant, comme précédemment, $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} = n$.

Or, on peut avoir une seconde expression du même secteur en fonction de u. En effet, on a, en observant que les ordonnées correspondantes à la même abscisse dans l'ellipse et le cercle sont dans le rapport constant de $b : a$,

$$\text{sect. MFA} = \frac{b}{a}\,\text{sect. NFA} = \sqrt{1-e^2}\,(\text{NOA} - \text{NOF});$$

mais

$$\text{NOA} = \frac{a^2}{2} u, \quad \text{NOF} = \frac{\text{NO.OF} \sin u}{2} = \frac{a^2 e \sin u}{2};$$

donc

$$\text{sect. MFA} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}(u - e\sin u).$$

Égalant les deux valeurs du secteur, on retrouve l'équation déjà obtenue

$$nt = u - e \sin u.$$

Enfin, on obtiendra une équation entre θ et u en égalant les deux expressions de r en fonction de chacune de ces quantités, et l'on retombera sur l'équation

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u.$$

30. Avant de procéder au développement des coordonnées de la planète en fonction du temps, nous allons montrer comment les formules précédentes se simplifient lors-

que l'on peut négliger les puissances de e supérieures à la première; ce qui est permis pour la plupart des planètes, avec une assez grande approximation.

L'équation $u = nt + e \sin u$ donne

$$u = nt + e \sin (nt + e \sin u),$$

et, en négligeant e^2,

$$u = nt + e \sin nt.$$

Or, on a

$$r = a(1 - e \cos u);$$

donc, en négligeant encore e^2, on aura

$$r = a(1 - e \cos nt).$$

Il ne reste plus à déterminer que θ. On pourrait le tirer de l'équation de la trajectoire dans laquelle on remettrait pour r la valeur que nous venons de trouver. Mais il vaut mieux le calculer directement d'après l'équation

$$r^2 d\theta = cdt = dt \sqrt{\mu a (1 - e^2)}.$$

En négligeant le carré de e, l'équation de la trajectoire donne

$$r = a(1 - e \cos \theta) \quad \text{et} \quad r^2 = a^2(1 - 2e \cos \theta),$$

et, par suite,

$$d\theta (1 - 2e \cos \theta) = dt \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} = ndt;$$

d'où, en intégrant et observant qu'on a en même temps $t = 0$, $\theta = 0$,

$$nt = \theta - 2e \sin \theta,$$

et, par suite, en négligeant e^2,

$$\theta = nt + 2e \sin nt.$$

31. Le mouvement angulaire de la planète serait uniforme, si l'on pouvait négliger le terme $2e \sin nt$. Mais on peut toujours se représenter un point dont le mouvement angulaire aurait pour équation $\theta = nt$, et qui partirait du périhélie en même temps que la planète; il passerait encore en même temps qu'elle à l'aphélie, parce que pour ce point, on a $\theta = \pi$, et, par conséquent, $\sin nt = 0$. Dans la première moitié de la trajectoire, la planète réelle est en avant de la planète fictive, d'une quantité angulaire dont la valeur approchée est $2e \sin nt$, et que l'on nomme l'*équation du centre*. Dans la seconde moitié, au contraire, c'est la planète réelle qui est en arrière de l'autre, puisque $\sin nt$ est négatif; elle la rejoint au périhélie, et le même mouvement recommence et se reproduit indéfiniment.

On donne à cet angle nt le nom d'*anomalie moyenne;* on l'appelle encore le *moyen mouvement* de la planète.

La considération de cet astre fictif est utile dans le cas de la terre pour la détermination du temps moyen. On corrige ainsi l'inégalité du mouvement du soleil dans l'écliptique; il reste encore à corriger celle qui provient de l'inclinaison du plan de l'écliptique sur celui de l'équateur; et c'est à quoi l'on parvient en imaginant un second astre fictif dont le mouvement est uniforme et compris dans le plan de l'équateur. C'est lui qui détermine ce que l'on appelle le *temps moyen;* il coïncide quatre fois dans l'année avec le *temps vrai* qui est indiqué par le soleil réel.

Nous allons maintenant chercher le développement des valeurs des deux coordonnées r et θ de la planète en fonction de t. Nous nous servirons, à cet effet, d'une formule importante due à Lagrange; et quoiqu'elle se rapporte naturellement au cours de calcul différentiel, il ne sera peut-être pas inutile d'en donner ici la démonstration.

Formule de Lagrange pour le développement de certaines fonctions implicites.

32. Considérons la fonction z de la variable x, déterminée par l'équation

$$(1) \qquad z = x + \alpha f(z),$$

f désignant une fonction donnée quelconque, et α une quantité très-petite par rapport aux puissances de laquelle nous nous proposons de développer z. Les coefficients de ces puissances seront des fonctions de x qu'il s'agit de déterminer, et, d'après le théorème de Maclaurin, seront les valeurs que l'on obtient en faisant $\alpha = 0$ dans z, et toutes ses dérivées par rapport à α, x étant regardé comme une constante. La question se réduit à trouver la loi de ces dérivées.

Ce premier problème n'est qu'un cas particulier de celui que nous avons en vue, et qui a pour objet le développement d'une fonction quelconque de z, suivant les puissances de α.

Au lieu du développement que nous cherchons, on pourrait, par des substitutions successives, obtenir des valeurs de plus en plus approchées de z. Ainsi, en substituant, dans le second membre de l'équation (1), à z sa première valeur approchée de x, on aurait

$$z = x + \alpha f(x).$$

Substituant maintenant cette nouvelle valeur plus approchée dans le même membre, on obtiendrait

$$z = x + \alpha f[x + \alpha f(x)],$$

et l'on pourrait continuer ainsi indéfiniment; mais on aurait, de cette manière, des formules très-compliquées, et

qui ne permettraient pas d'apprécier le degré d'approximation ; et c'est pour cette raison qu'on a cherché un développement ordonné suivant les puissances de α, et qui est d'autant plus convergent que α est plus petit.

D'après la formule de Maclaurin, nous aurons

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2 z}{d\alpha^2}\right)_0 \frac{\alpha^2}{1.2} + \ldots + \left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0 \frac{\alpha^m}{1.2\ldots m} + \ldots .$$

Il faut donc connaître la valeur de z et de ses dérivées par rapport à α, quand on y fait $\alpha = 0$. L'équation (1) montre que z se réduit, dans ce cas, à x ; ainsi $z_0 = x$, et il reste à trouver généralement $\left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0$.

Pour cela, commençons par différentier partiellement l'équation (1) par rapport à chacune des deux quantités x et α, considérées comme variables indépendantes ; nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \alpha f'(z)\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{d\alpha} = f(z) + \alpha f'(z)\frac{dz}{d\alpha},$$

et, en éliminant $f'(z)$,

$$\frac{dz}{d\alpha} = f(z)\frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

Cette formule ramène les différentiations de z par rapport à α, à celles de z par rapport à x, dont l'emploi est très-avantageux, comme on va le reconnaître.

On tirera déjà de là $\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0$; car, dans l'hypothèse de $\alpha = 0$, z devient x, et $\frac{dz}{dx}$ devient 1 ; ce qui donne

$$\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0 = f(x).$$

Pour obtenir $\frac{d^2 z}{d\alpha^2}$, différentions les deux membres de l'équation (2) par rapport à α, il vient

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + f(z)\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha};$$

on obtiendra $\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha}$ en différentiant par rapport à x la valeur de $\frac{dz}{d\alpha}$, fournie par l'équation (2) ; ce qui donne

$$\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha} = f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z)\frac{d^2 z}{dx^2};$$

et, substituant, dans le premier terme de la dernière équation, à $\frac{dz}{d\alpha}$ sa valeur donnée par cette même équation, on aura la valeur suivante de $\frac{d^2 z}{d\alpha^2}$ au moyen de dérivées de z par rapport à x,

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = 2f(z)f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (fz)^2\frac{d^2 z}{dx^2};$$

et comme ce second membre est la dérivée, par rapport à x, de $(fz)^2\frac{dz}{dx}$, on aura enfin

$$(3) \qquad \frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{d\left[(fz)^2\frac{dz}{dx}\right]}{dx};$$

et faisant $\alpha = 0$,

$$\left(\frac{d^2 z}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{d.(fx)^2}{dx}.$$

Or, nous allons voir que toutes les dérivées suivantes de z par rapport à α s'obtiennent, pour $a = 0$, par des diffé-

rentiations par rapport à x, effectuées sur les différentes puissances de $f(x)$.

Pour avoir la valeur de $\frac{d^3 z}{d\alpha^3}$, il faudrait différentier, par rapport à α, le second membre de l'équation (3); et, comme l'ordre des différentiations par rapport à x et α est indifférent, on pourra commencer par différentier $(fz)^2 \frac{dz}{dx}$ par rapport à α, puis le résultat par rapport à x. Mais, pour n'avoir pas à recommencer toujours les mêmes réductions, nous allons considérer généralement $\varphi(z)\frac{dz}{dx}$, en prendre la dérivée par rapport à α, et la ramener à des dérivées par rapport à x.

On aura d'abord

$$\frac{d\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \varphi'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + \varphi(z)\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha};$$

remettant pour $\frac{dz}{d\alpha}$, $\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha}$ les mêmes valeurs que précédemment, cette expression devient

$$\varphi'(z)f(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z)f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z)f(z)\frac{d^2 z}{dx^2},$$

ce qui n'est autre chose que la dérivée, par rapport à x, de $\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}$. On a donc la formule générale

$$(4) \qquad \frac{d\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \frac{d\left[\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Au moyen de cette formule, on aurait déduit l'équation (3) de l'équation (2), en supposant $\varphi(z) = f(z)$

Si l'on suppose maintenant $\varphi(z) = (fz)^2$, on aura

$$\frac{d\left[(fz)^2 \frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \frac{d\left[(fz)^3 \frac{dz}{dx}\right]}{dx},$$

et, par conséquent, en différentiant l'équation (3) par rapport à α, on obtiendra

$$\frac{d^3 z}{d\alpha^3} = \frac{d^2\left[(fz)^3 \frac{dz}{dx}\right]}{dx^2}.$$

Supposant ensuite $\varphi(z) = (fz)^3$, on passera à $\frac{d^4 z}{d\alpha^4}$, et la loi que ces premières formules manifestent s'observera indéfiniment; car, si l'on a

$$\frac{d^n z}{d\alpha^n} = \frac{d^{n-1}\left[(fz)^n \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}},$$

en différentiant les deux membres par rapport à α, en faisant usage de l'équation (4), et en prenant $\varphi(z) = (fz)^n$, on obtiendra

$$\frac{d^{n+1} z}{d\alpha^{n+1}} = \frac{d^n\left[(fz)^{n+1} \frac{dz}{dx}\right]}{dx^n};$$

ce qui fait voir que la loi supposée pour l'ordre n a lieu pour le suivant, et comme elle se vérifie pour les premières dérivées, elle a lieu pour toutes; on a donc généralement la formule

$$(5) \qquad \frac{d^m z}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}\left[(fz)^m \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{m-1}}.$$

Si l'on y fait $\alpha = 0$, on aura

$$z = x, \quad \frac{dz}{dx} = 1;$$

et, par suite,

$$\left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}[(fx)^m]}{dx^{m-1}}.$$

Le développement de z sera donc

$$(6)\quad \begin{cases} z = x + \alpha f(x) + \dfrac{\alpha^2}{1.2}\dfrac{d(fx)^2}{dx} + \dfrac{\alpha^3}{1.2.3}\dfrac{d^2(fx)^3}{dx^2} + \ldots \\ \quad + \dfrac{\alpha^m}{1.2\ldots m}\dfrac{d^{m-1}(fx)^m}{dx^{m-1}} + \ldots. \end{cases}$$

33. Passons au problème plus général dont l'objet serait le développement d'une fonction quelconque F (z), suivant les puissances de α, en supposant que z soit toujours déterminé par l'équation (1).

La formule de Maclaurin donne

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z)_0 + \left(\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{d\alpha^2}\right)_0 \frac{\alpha^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^m\mathrm{F}}{d\alpha^m}\right)_0 \frac{\alpha^m}{1.2\ldots m} + \ldots.$$

Le premier terme n'est autre chose que F (x), puisque z devient x, pour $\alpha = 0$. Reste à déterminer généralement $\left(\dfrac{d^m\mathrm{F}}{d\alpha^m}\right)_0$.

On aura d'abord

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha} = \mathrm{F}'(z)\frac{dz}{d\alpha} = \mathrm{F}'(z)f(z)\frac{dz}{dx}.$$

Pour avoir $\dfrac{d^2\mathrm{F}}{d\alpha^2}$, il faut différentier le second membre par rapport à α; ce qui se ramènera à des différentiations par rapport à x, au moyen de l'équation (4). On trouve ainsi

$$\frac{d^2\mathrm{F}}{d\alpha^2} = \frac{d\left[\mathrm{F}'(z)(fz)^2\dfrac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Cette équation conduit de même à la suivante :

$$\frac{d^3 F}{d\alpha^3} = \frac{d^2\left[F'(z)(fz)^3\frac{dz}{dx}\right]}{dx^2};$$

et ainsi de suite, en augmentant à chaque fois l'exposant de $f(z)$ d'une unité, ainsi que l'indice de la différentiation du produit entre ces parenthèses. On a donc généralement

$$\frac{d^m F}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}\left[F'(z)(fz)^m\frac{dz}{dx}\right]}{dx^{m-1}}.$$

Si maintenant on fait $\alpha = 0$ dans cette formule, il faudra remplacer z par x et $\frac{dz}{dx}$ par 1 ; d'où résultera

$$\left(\frac{d^m F}{d\alpha^m}\right) = \frac{d^{m-1}[F'(x)(fx)^m]}{dx^{m-1}}.$$

On connaîtra donc tous les coefficients du développement de $F(z)$ en différentiant, par rapport à x, des fonctions connues de cette variable. La formule à laquelle on parvient ainsi est

$$(7)\left\{\begin{aligned} F(z) = F(x) + \alpha F'(x)f(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d[F'(x)(fx)^2]}{dx} + \ldots \\ + \frac{\alpha^m}{1.2\ldots m}\frac{d^{m-1}[F'(x)(fx)^m]}{dx^{m-1}} + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Solution du problème de Képler.

34. Ce problème a pour objet le développement des valeurs des deux coordonnées polaires r et θ d'une planète, en fonction de la variable indépendante t. Nous le résou-

drons, pour le cas du mouvement elliptique et dans l'hypothèse où e serait une très-petite fraction, comme cela a lieu pour la plupart des planètes : pour l'orbite de la terre par exemple, on a

$$e = 0,01685318.$$

Nous avons obtenu entre r, θ, t et la variable auxiliaire u, les trois équations suivantes :

$$(8) \qquad u = nt + e \sin u,$$

$$(9) \qquad r = a(1 - e \cos u),$$

$$(10) \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u;$$

elles détermineraient commodément t, r et θ pour une valeur quelconque de u ; mais ce ne serait que par des interpolations pénibles que l'on pourrait connaître r et θ pour une valeur donnée de t, et c'est pour éviter cet inconvénient qu'on a cherché à exprimer directement ces quantités en fonction de t.

L'équation (8) rentre dans l'équation (1) en faisant dans celle-ci

$$z = u, \quad x = nt, \quad \alpha = e, \quad f(x) = \sin x.$$

On aura donc immédiatement le développement de u suivant les puissances de e, en faisant ces substitutions dans la formule (6). On trouvera d'abord, en laissant x pour abréger,

$$u = x + e \sin x + \frac{e^2}{1.2} \frac{d.\sin^2 x}{dx} + \ldots + \frac{e^m}{1.2\ldots m} \frac{d^{m-1}.\sin^m x}{dx^{m-1}} + \ldots$$

Exprimons maintenant les puissances de $\sin x$ au moyen des sinus ou cosinus des multiples de x, et effectuons ensuite les différentiations indiquées ; nous obtiendrons les deux

suites d'équations

$$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1,$$
$$2^2\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x,$$
$$2^3\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3,$$
$$2^4\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x,$$
$$2^5\sin^6 x = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10,$$

et en différentiant, après avoir divisé par la puissance de 2, qui est facteur dans les premiers membres,

$$\frac{d.\sin^2 x}{dx} = \sin 2x,$$
$$\frac{d^2.\sin^3 x}{dx^2} = \frac{3^2\sin 3x - 3\sin x}{2^2},$$
$$\frac{d^3.\sin^4 x}{dx^3} = 2^3\sin 4x - 4\sin 2x,$$
$$\frac{d^4.\sin^5 x}{dx^4} = \frac{5^4\sin 5x - 5.3^4\sin 3x + 10\sin x}{2^4},$$
$$\frac{d^5.\sin^6 x}{dx^5} = 3^5\sin 6x - 6.2^5\sin 4x + 3.5\sin 2x.$$

Faisant ces substitutions, puis remplaçant x par nt, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} u = nt &+ e\sin nt + \frac{e^2}{2}\sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{2^3}(3\sin 3nt - \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{2.3}(2\sin 4nt - \sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^7.3}(5^3\sin 5nt - 3^4\sin 3nt + 2\sin nt) \\ &+ \frac{e^6}{2^4.3.5}(3^4\sin 6nt - 2^6\sin 4nt + 5\sin 2nt) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Maintenant que l'on peut trouver u d'après une valeur

quelconque de t, on pourrait, au moyen des équations (9) et (10), connaître r et θ pour chaque valeur de t; mais il vaut mieux encore éviter l'intermédiaire u et exprimer immédiatement ces quantités en fonction de t.

35. *Expression du rayon vecteur en fonction du temps.* — D'après l'équation (9), $\frac{r}{a}$ est une fonction connue de u, et pourra se déterminer au moyen de la formule (7), dans laquelle il faudra faire

$$F(x) = 1 - e\cos x;$$

par suite,

$$F'(x) = e\sin x,$$

et, comme dans le cas précédent,

$$\alpha = e, \quad f(x) = \sin x, \quad x = nt.$$

On aura donc d'abord

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos x + e^2\sin^2 x + \frac{e^3}{2}\frac{d.\sin^3 x}{dx} + \frac{e^4}{2.3}\frac{d^2.\sin^4 x}{dx^2} + \frac{e^5}{2.3.4}\frac{d^3.\sin^5 x}{dx^3} + \ldots.$$

Mais on a

$$\sin^2 x = \frac{-\cos 2x + 1}{2},$$

$$\frac{d.\sin^3 x}{dx} = \frac{-3\cos 3x + 3\cos x}{2^2},$$

$$\frac{d^2.\sin^4 x}{dx^2} = -2\cos 4x + 2\cos 2x,$$

$$\frac{d^3.\sin^5 x}{dx^3} = \frac{-5^3\cos 5x + 5.3^3\cos 3x - 5.2\cos x}{2^4},$$

$$\frac{d^4.\sin^6 x}{dx^4} = \frac{-3^4\cos 6x + 6.2^4\cos 4x - 3.5\cos 2x}{2},$$

....

Substituant dans la valeur de $\frac{r}{a}$, et remettant nt au lieu de x, on a la formule cherchée

$$
(12) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{r}{a} = 1 - e \cos nt - \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2^3}(3 \cos 3nt - 3 \cos nt) \\
&- \frac{e^4}{3}(\cos 4nt - \cos 2nt) - \frac{e^5}{2^7.3}(5^3 \cos nt - 5.3^3 \cos 3nt + 5.2 \cos nt) \\
&- \frac{e^6}{2^4.5}(3^3 \cos 6nt - 2^5 \cos 4nt + 5 \cos 2nt) - \ldots
\end{aligned} \right.
$$

36. *Expression de l'anomalie vraie en fonction du temps.* — Il ne reste plus qu'à exprimer θ en fonction de t. L'équation (10), au moyen de transformations élégantes de u, dues à Lagrange, fera d'abord connaître θ en fonction de $\sin u$, $\sin 2u$, etc. Remplaçant ensuite ces dernières quantités par les développements ordonnés suivant les puissances de e, on aura la solution de la question.

Substituant d'abord aux tangentes les rapports du sinus au cosinus, et à ceux-ci leurs expressions en exponentielles imaginaires, l'équation (10) deviendra, en désignant par ε la base du système de logarithmes népériens,

$$\frac{\varepsilon^{\theta\sqrt{-1}} - 1}{\varepsilon^{\theta\sqrt{-1}} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \, \frac{\varepsilon^{u\sqrt{-1}} - 1}{\varepsilon^{u\sqrt{-1}} + 1};$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon^{\theta\sqrt{-1}} = \frac{\varepsilon^{u\sqrt{-1}}(\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}) + \sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}}{\varepsilon^{u\sqrt{-1}}(\sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}) + \sqrt{1-e} + \sqrt{1+e}}.$$

Posons

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}},$$

nous aurons

$$\varepsilon^{\theta\sqrt{-1}} = \frac{\varepsilon^{u\sqrt{-1}} - \lambda}{1 - \lambda\varepsilon^{u\sqrt{-1}}} = \varepsilon^{u\sqrt{-1}} \, \frac{1 - \lambda\varepsilon^{-u\sqrt{-1}}}{1 - \lambda\varepsilon^{u\sqrt{-1}}},$$

et, prenant les logarithmes des deux membres, puis divisant par $\sqrt{-1}$,

$$\theta = u + \frac{l(1-\lambda\varepsilon^{-u\sqrt{-1}}) - l(1-\lambda\varepsilon^{u\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}}.$$

On peut développer les logarithmes, puisque λ est plus petit que l'unité; et si l'on remplace les exponentielles imaginaires par des sinus et cosinus, on aura enfin

$$\theta = u + 2\left(\lambda \sin u + \frac{\lambda^2}{2}\sin 2u + \frac{\lambda^3}{3}\sin 3u + \frac{\lambda^4}{4}\sin^4 u + \ldots\right).$$

Il faut maintenant substituer à u, $\sin u$, $\sin 2u$, ... leurs développements ordonnés, par rapport aux puissances de e, d'après la formule de Lagrange. La valeur de u est déjà donnée par l'équation (11); et $\sin u$ s'en déduit d'après l'équation (8), qui donne

$$\sin u = \frac{u - nt}{e} = \sin nt + \frac{e}{2}\sin 2nt + \frac{e^2}{2^3}(3\sin 3nt - \sin nt) + \ldots.$$

On trouvera ensuite, par la formule de Lagrange,

$$\sin 2u = \sin 2nt + e(\sin 3nt - \sin nt) + e^2(\sin 4nt - \sin 2nt) + \frac{e^3}{2^3.3}(4\sin nt - 27\sin 3nt + 25\sin 5nt) + \ldots,$$

$$\sin 3u = \sin 3nt + \frac{e}{2}(3\sin 4nt - 3\sin 2nt) + \frac{e^2}{2^3}(15\sin 5nt - 18\sin 3nt + 3\sin nt) + \frac{e^3}{4}(9\sin 6nt - 12\sin 4nt + 3\sin 2nt) + \ldots.$$

Il ne reste plus qu'à développer les puissances de λ suivant celles de e.

Pour cela, posons

$$1 + \sqrt{1 - e^2} = E;$$

d'où

$$E = 2 - \frac{e^2}{E};$$

nous pourrons développer E^{-p}, suivant les puissances de e^2, au moyen de la formule (7), dans laquelle il faudra supposer

$$z = E, \quad x = 2, \quad \alpha = e^2, \quad F(z) = z^{-p} = E^{-p}.$$

On aura ainsi

$$E^{-p} = \frac{1}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}}e^2 + \frac{p(p+3)}{2.2^{p+4}}e^4 + \frac{p(p+4)(p+5)}{2.3.2^{p+6}}e^6 + \ldots,$$

et, comme on a

$$\lambda = eE^{-1},$$

on aura

$$\lambda^p = \frac{e^p}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}}e^{p+2} + \frac{p(p+3)}{2.2^{p+4}}e^{p+4} + \frac{p(p+4)(p+5)}{2.3.2^{p+6}}e^{p+6} + \ldots.$$

Substituant aux diverses puissances de λ les valeurs résultant de cette formule, on aura, en négligeant les puissances de e supérieures à la sixième,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \theta = nt &+ \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin nt \\ &+ \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2nt + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3nt \\ &+ \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4nt \\ &+ \frac{1097}{960}e^5 \sin 5nt + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6nt, \end{aligned}\right.$$

ou, en ordonnant par rapport aux puissances de e,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= nt + 2e\sin nt + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{2^2.3}(13\sin 3nt - 3\sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{2^5.3}(103\sin 4nt - 44\sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^6.3.5}(1097\sin 5nt - 645\sin 3nt + 50\sin nt) + \ldots \end{aligned}\right.$$

On voit qu'en négligeant les puissances de e, supérieures à la première, les formules (12) et (13) donnent, comme nous l'avions précédemment obtenu pour ce degré d'approximation,

$$r = a(1 - e\cos nt),$$

$$\theta = nt + 2e\sin nt.$$

CHAPITRE XIII.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE POINTS.

37. Il n'y a lieu de considérer que le cas où il existe des liaisons entre les points du système; car sans cela le mouvement de chacun d'eux se déterminerait isolément, comme nous l'avons vu précédemment.

Supposons donc qu'il existe des liaisons qui puissent s'exprimer par des équations, et soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

un nombre k d'équations qui doivent avoir lieu à chaque instant entre le temps et les coordonnées de ces divers points. Si l'on donne en grandeur et en direction les forces qui sollicitent chacun d'eux, et qui dépendent soit de leur position, soit du temps; si l'on connaît, de plus, la position

initiale de tous les points, ainsi que les directions et les grandeurs de leurs vitesses initiales, il est évident que le mouvement est complétement déterminé, et que les coordonnées de chaque point dépendent du temps, d'une manière qui n'a plus rien d'arbitraire. Si donc on désigne par n le nombre des points matériels du système; comme on connaît déjà k équations entre leurs $3n$ coordonnées, il reste encore à trouver $3n - k$ équations entre ces mêmes coordonnées et le temps; et le problème se trouvera complétement résolu, puisqu'on pourra assigner à chaque instant la position de tous les points, et par suite toutes les circonstances du mouvement. Ces équations s'obtiennent au moyen du principe suivant, qui est dû à d'Alembert.

Principe de d'Alembert.

38. Ce principe a pour objet de ramener la détermination du mouvement d'un système quelconque à la considération de l'équilibre de ce même système.

Lorsque des points sont soumis à certaines liaisons, les forces qui leur sont appliquées ne leur donnent pas le même mouvement que s'ils étaient entièrement isolés et libres. Si l'on pouvait évaluer les forces qui proviennent de ces liaisons, en les joignant pour chaque point à celles qui y sont directement appliquées, on pourrait les considérer tous comme entièrement libres et isolés. Désignons par m la masse de l'un quelconque d'entre eux, et par x, y, z ses coordonnées; les trois composantes de toutes les forces ainsi calculées devraient donc respectivement être égalées à

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2},$$

dont nous représenterons la résultante par Q.

Cela posé, soit P la force donnée qui agit sur le point m; appliquons à ce point la force Q, et une force égale et contraire Q_1, et agissons de même pour tous les autres points; rien ne sera changé ni dans le mouvement, ni dans les efforts exercés sur les différentes parties du système, puisque les forces introduites se détruisent deux à deux sur un même point, et par conséquent n'établissent aucune action entre deux points différents.

Mais le point m pourrait être considéré comme libre si l'on introduisait les forces que produisent sur lui les liaisons du système; donc ces dernières doivent exactement détruire P et Q_1, puisque la force Q produirait sur ce point libre le mouvement qu'il suit réellement. Et si les forces P et Q_1 n'étaient pas détruites par celles qui proviennent des liaisons, elles se composeraient avec elles et donneraient une résultante qui, conjointement avec Q, devrait produire sur le point libre le même mouvement que la force Q seule, ce qui est absurde. D'où il suit que les liaisons du système développent à chaque instant des forces qui font équilibre aux forces P et Q_1, relatives à tous les points. On peut donc énoncer le principe suivant qui est dû à d'Alembert :

Dans le mouvement d'un système quelconque de points soumis à des liaisons quelconques, et sollicités par des forces quelconques, il y a équilibre à chaque instant, au moyen de ces liaisons, entre ces forces et des forces égales et directement opposées à celles qui produiraient sur chaque point matériel, supposé libre, le mouvement qu'il suit réellement; ou, en d'autres termes, entre ces forces et les forces d'inertie développées par chaque point du système.

Quant aux efforts exercés sur le système, ils peuvent

varier à chaque instant, et sont produits par les forces variables qui s'y font continuellement équilibre.

39. Voyons comment ce principe conduit à la détermination du mouvement de chaque point, en fournissant autant d'équations qu'il y a de coordonnées indépendantes. Désignons par X, Y, Z les composantes connues de la force totale appliquée au point dont la masse est m; par X', Y', Z' celles qui se rapportent au point m', et ainsi de suite, ces forces pouvant être nulles pour un nombre quelconque de ces points; d'après ce que nous avons dit, il devra y avoir à chaque instant équilibre sur le système entre ces forces et celles dont les composantes sont, pour chacun des mêmes points respectivement,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$
$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2},\quad -m'\frac{d^2y'}{dt^2},\quad -m'\frac{d^2z'}{dt^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x, y, z,... désignant les coordonnées de ces différents points. En d'autres termes, il doit y avoir équilibre entre les forces suivantes, appliquées respectivement aux points m, m',..., parallèlement aux axes de coordonnées

$$\mathrm{X}-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad \mathrm{X}'-m'\frac{d^2x'}{dt^2},\ldots,$$
$$\mathrm{Y}-m\frac{d^2y}{dt^2},\quad \mathrm{Y}'-m'\frac{d^2y'}{dt^2},\ldots,$$
$$\mathrm{Z}-m\frac{d^2z}{dt^2},\quad \mathrm{Z}'-m'\frac{d^2z'}{dt^2},\ldots$$

Les conditions d'équilibre seront exprimées par l'équation suivante que donne le principe des vitesses virtuelles, en

supposant les axes rectangulaires :

$$(1)\quad \sum \left\{ \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\} = 0.$$

δx, δy, δz désignent les composantes du déplacement infiniment petit quelconque, que l'on pourrait faire subir au point (x, y, z), à un instant quelconque du mouvement, sans violer les conditions du système, telles qu'elles sont au moment même que l'on considère, et le temps n'étant pour rien dans la considération des déplacements, ou vitesses virtuelles, δx, δy, δz. La somme Σ s'étend à tous les points matériels du système, et les quantités X, Y, Z seront supposées nulles pour ceux auxquels aucune force ne sera appliquée.

L'équation (1) renferme $3n$ variations, le nombre des points étant n; et elles doivent satisfaire aux k équations différentielles des équations données $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, ce qui donne

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \dfrac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Éliminant k variations, au moyen de ces équations, il n'en restera plus que $3n - k$ complétement indéterminées. En égalant à zéro les coefficients de chacune d'elles, on obtiendra $3n - k$ équations qui, jointes aux k premières, détermineront les coordonnées de tous les points en fonction du temps. Le problème se trouve donc ainsi ramené à l'intégration d'équations différentielles.

40. Si l'on multiplie les équations (2) par des indéterminées λ, μ, ν,..., qu'on les ajoute à l'équation (1), et qu'on égale à zéro les coefficients de chacune des variations, on aura

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots = 0,$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots = 0,$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \ldots = 0,$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} + \ldots = 0,$$

....

Si l'on élimine les k indéterminées λ, μ, ν,..., on obtiendra $3n - k$ équations différentielles du second ordre entre x, y, z, x',... et le temps t. Ces équations seront les mêmes que si l'on avait éliminé k variations, comme nous l'avons d'abord indiqué; mais ce procédé a l'avantage que nous avons déjà reconnu, quand nous l'avons appliqué au principe des vitesses virtuelles; il détermine les forces dont les équations de condition tiennent lieu; et les valeurs des quantités λ, μ, ν,... feront connaître les efforts qu'éprouvent à chaque instant les liens qui assujettissent les points à satisfaire à ces équations.

Si le système est déterminé par d'autres variables que les coordonnées de ses points, on suivra toujours la même marche; et l'application du principe des vitesses virtuelles fera toujours connaître autant d'équations qu'il y a de variables indépendantes; de sorte qu'en les joignant aux équations de condition, on pourra toujours déterminer toutes les variables en fonction du temps; ce qui est précisément l'objet que l'on se propose.

41. *Détermination des constantes.*—Les constantes in-

troduites par l'intégration des $3n - k$ équations différentielles seront au nombre de $6n - 2k$; et on les déterminera par les données de l'état initial, c'est-à-dire au moyen des positions de tous les points, ainsi que des grandeurs et des directions de leur vitesse, à un certain instant, qu'on prendra pour origine des temps. Ces positions initiales ne sont pas entièrement arbitraires, parce que leurs coordonnées doivent satisfaire aux k équations données: de sorte qu'on ne peut se donner arbitrairement que $3n - k$ de ces coordonnées. De même aussi, les composantes de leurs vitesses doivent satisfaire aux k équations qu'on obtient entre $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots$, en différentiant les k équations données; d'où il suit qu'on ne pourra se donner arbitrairement que $3n - k$ composantes des vitesses initiales. Ainsi, pour que l'état initial soit entièrement déterminé, ce qui est indispensable, il faut que l'on se donne $6n - 2k$ quantités, qui peuvent être choisies tout à fait arbitrairement; mais on ne peut pas s'en donner davantage.

Cela posé, quand on aura intégré le système des équations différentielles, on aura, pour déterminer toutes les coordonnées des n points, d'abord les k équations données, et ensuite $3n - k$ équations, renfermant $6n - 2k$ constantes arbitraires. Ces $3n - k$ équations devant être satisfaites à chaque instant, on y fera $t = 0$, et on remplacera les coordonnées par leurs valeurs initiales : il en résultera $3n - k$ équations entre les constantes et des quantités connues; les k équations restantes seront nécessairement satisfaites, puisque l'on a dû choisir les coordonnées initiales, de telle sorte que les liaisons exigées eussent lieu. Différentiant ensuite les $3n - k$ équations entre les coordonnées, on en aura un égal nombre entre les composantes des vitesses; et si l'on y substitue les valeurs initiales des coordonnées et de ces composantes, on aura $3n - k$ nou-

velles équations entre les constantes arbitraires et des quantités connues. On aura donc enfin $6n - 2k$ équations pour déterminer les $6n - 2k$ constantes. On en pourra donc tirer les valeurs de ces inconnues, et les coordonnées de tous les points du système seront complétement déterminées en fonction du temps.

Ce que l'on entend par forces instantanées. Leur mesure. Détermination du mouvement qu'elles produisent. Superposition de leurs effets.

42. Nous avons démontré, dans le n° 260, tome I, qu'une force constante pouvait être mesurée par la quantité de mouvement qu'elle a produite, divisée par le temps employé à la produire; d'où il résulte que pour produire une quantité de mouvement déterminée, il faut que la durée de l'action soit d'autant moindre que la force employée est plus grande, mais qu'il n'y a aucune force qui puisse y parvenir sans employer un certain temps. Néanmoins, si l'effet est produit dans un temps si court, que rien n'ait pu changer sensiblement dans les positions des points, on pourra, dans la plupart des cas, faire abstraction de ce temps; et pour indiquer cela, nous donnerons à la force le nom de *force instantanée*.

Pour mesurer, soit la valeur constante d'une pareille force, soit sa valeur moyenne, si elle est variable, on pourrait la rapporter à l'unité ordinaire, et l'on aurait pour mesure la quantité de mouvement produite, divisée par la durée de l'action. Mais cette durée n'étant pas appréciable, au moins dans le cas où il peut y avoir quelque utilité à considérer ce genre de force, il vaut mieux ne pas l'introduire dans la mesure, et se borner à la quantité de mouvement. On supposera alors à l'action la durée que l'on voudra, pourvu qu'elle soit extrêmement petite; les

effets n'en dépendront nullement, comme nous allons le faire voir, en donnant le moyen de les calculer. Ainsi nous mesurerons une force instantanée par la quantité de mouvement qu'elle produit en agissant sur un point matériel libre en repos. Et comme la décomposition des forces se fait de la même manière que celle des vitesses, il s'ensuit que les composantes d'une force instantanée, prises parallèlement à des directions données d'après les mêmes règles que pour les forces continues, ne sont autre chose que les forces instantanées qui correspondraient aux composantes de la vitesse totale suivant les mêmes directions.

Enfin, comme les composantes de la vitesse d'un point matériel, parallèles à trois axes fixes, se trouvent augmentées par l'action de forces quelconques de la même manière que si la vitesse initiale était nulle, il s'ensuit que les composantes de la force instantanée qui agit sur un point matériel en mouvement, sont mesurées par les quantités de mouvement correspondantes aux accroissements des composantes de la vitesse de ce point.

43. Pour déterminer l'effet de forces instantanées sur un système quelconque déjà en mouvement, appliquons l'équation (1) à ces forces, en négligeant toutes les autres qui ne peuvent produire aucun effet appréciable pendant la durée totale θ de ces actions, dont les unes peuvent cesser avant les autres. Les valeurs de $x, y, z, x', \ldots$ peuvent être regardées comme invariables pendant ce temps; et il est facile de voir qu'il en est de même de $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ En effet, ces variations satisfont aux équations différentielles de $L = 0$, $M = 0, \ldots$, dans lesquelles t est considéré comme une constante. Or, cette constante ne changeant qu'infiniment peu, dans l'intervalle de temps que l'on

considère, les quantités δx, δy,... ne peuvent changer que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes, et doivent par conséquent être considérées comme invariables. Intégrons maintenant l'équation (1) par rapport à t, en prenant pour limites le commencement et la fin de l'intervalle θ; désignons par $m\mathrm{X}$, $m\mathrm{Y}$, $m\mathrm{Z}$ les composantes de la force appliquée au point dont la masse est m; et par $\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$, $\Delta\frac{dz}{dt}$ les intégrales de $\frac{d^2x}{dt^2}dt$, $\frac{d^2y}{dt^2}dt$, $\frac{d^2z}{dt^2}dt$, qui sont les accroissements des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\sum m\left[\begin{array}{r}\left(\int \mathrm{X}\,dt-\Delta\frac{dx}{dt}\right)\delta x+\left(\int \mathrm{Y}\,dt-\Delta\frac{dx}{dt}\right)\delta y\\ +\left(\int \mathrm{Z}\,dt-\Delta\frac{dz}{dt}\right)\delta z\end{array}\right]=0.$$

Or, la force appliquée à la masse m ayant pour composantes $m\mathrm{X}$, $m\mathrm{Y}$, $m\mathrm{Z}$, les intégrales $m\int \mathrm{X}\,dt$, $m\int \mathrm{Y}\,dt$, $m\int \mathrm{Z}\,dt$ sont les composantes de la quantité de mouvement que produirait cette force dans le temps θ, et, par conséquent, les composantes de la force *instantanée*, d'après le sens que nous attachons à cette dénomination. Si on les représente par X_1, Y_1, X_1, l'équation précédente devient

$$(3)\quad \sum\left[\begin{array}{r}\left(\mathrm{X}_1-m\Delta\frac{dx}{dt}\right)\delta x+\left(\mathrm{Y}_1-\Delta\frac{dx}{dt}\right)\delta x\\ +\left(\mathrm{Z}_1-\Delta\frac{dz}{dt}\right)\delta z\end{array}\right]=0.$$

Mais si la masse m était libre, les composantes de la force instantanée qui changerait les composantes de sa

vitesse, de la même manière qu'elles l'ont été, seraient

$$\Delta m \frac{dx}{dt}, \quad m \Delta \frac{dy}{dt}, \quad m \Delta \frac{dz}{dt}.$$

Donc l'équation (3) exprime qu'il y a équilibre entre les forces instantanées qui ont agi, et les forces instantanées, prises en sens contraire, qui produiraient le même changement dans le mouvement de chaque point s'il était entièrement libre : ces dernières forces ne sont autre chose que les forces d'inertie correspondantes au changement brusque des vitesses. Le principe de d'Alembert s'applique donc aux changements brusques comme à ceux qui s'opèrent d'une manière continue dans le mouvement d'un système quelconque, en entendant que les forces instantanées se mesurent par la quantité de mouvement qu'elles communiqueraient à un point libre.

Il est important de remarquer que les accroissements des composantes des vitesses, ainsi déterminés, sont indépendants des grandeurs de ces vitesses, et sont les mêmes que si le système était en repos au moment où agissent les forces instantanées.

Et l'on voit encore que les vitesses, après l'effet des forces instantanées, sont les mêmes que si le système partait du repos et fût sollicité par les forces instantanées données, auxquelles on joindrait d'autres forces capables de communiquer au système en repos les vitesses dont les différents points sont animés à l'instant que l'on considère.

44. Lorsque l'on aura éliminé de l'équation (3) toutes les variations qui dépendent des autres, et qu'on aura égalé à zéro les coefficients de celles qui resteront, les équations ainsi obtenues renfermeront linéairement les composantes des forces instantanées, et les accroissements des composantes des quantités de mouvement; et, de plus, aucun terme ne sera indépendant de ces quantités. Ces équations,

jointes aux équations de condition, dont on déduira, par la différentiation, des équations renfermant linéairement à tous leurs termes les accroissements des composantes des vitesses, détermineront toutes les quantités inconnues $\Delta \frac{dx}{dt}, \ldots$

Or, d'après la théorie des équations du premier degré, les dénominateurs de leurs valeurs seront indépendants de X_1, Y_1, Z_1, $X'_1, \ldots$, et leurs numérateurs les renfermeront linéairement et sans termes indépendants. Donc, si les forces instantanées varient toutes dans un même rapport, les accroissements des composantes des vitesses varieront dans ce même rapport. Et plus généralement, *si l'on considère autant de systèmes que l'on voudra de forces instantanées, les accroissements des composantes des vitesses de chaque point, seront les sommes des accroissements qui correspondraient à chaque système de forces agissant séparément sur le système des points en repos.*

On arriverait à la même conséquence sans s'appuyer sur la résolution des équations du premier degré, et par la seule observation que nous avons faite sur la forme des équations de la question.

Ainsi, les effets que produirait chacune des forces, si elle agissait seule, se produisent en même temps sans se nuire; ils se superposent les uns aux autres: et en estimant les vitesses acquises suivant les mêmes directions, elles s'ajoutent pour former la vitesse totale acquise dans ces directions.

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT A QUELQUES EXEMPLES.

45. Supposons que deux points, liés par un fil inexten-

sible, soient posés sur deux plans inclinés dont l'intersection soit horizontale, et de telle sorte, que leur sytème soit toujours compris dans un même plan perpendiculaire à cette intersection.

Soient m, m' les masses de ces points; θ, θ' les angles que les plans font avec la verticale; x, x' les distances AB, AC (*fig.* 5) de ces points au point A, commun aux deux plans, et l la longueur du fil.

Les forces qui produiraient sur les points libres le mouvement qui a lieu réellement seraient respectivement $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$, et agiraient dans les directions AH, AK. Celles qui agissent effectivement sont mg, $m'g$, et sont dirigées dans le sens de la pesanteur. Il doit donc y avoir équilibre dans le système entre les premières forces prises en sens contraire, et les dernières prises dans le sens même de la pesanteur.

Pour exprimer cet équilibre, nous concevrons un déplacement virtuel infiniment petit quelconque, en observant qu'on peut regarder les points comme obligés à rester dans le plan AHK perpendiculaire à l'intersection des deux plans inclinés; car le mouvement réel ayant nécessairement lieu dans ce plan, on peut, sans y rien changer, supposer que les points sont assujettis à y rester.

Soient δx, $\delta x'$ les variations de x, x'; la somme des moments virtuels égalée à zéro donnera

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + mg\cos\theta\,\delta x + m'g\cos\theta'\,\delta x' = 0,$$

et comme on a

$$x + x' = l,$$

il en résulte

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Multipliant cette équation par λ, et l'ajoutant à la pre-

mière, puis égalant à zéro les coefficients de δx, $\delta x'$, il vient

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+mg\cos\theta+\lambda=0,\quad -m'\frac{d^2x'}{dt^2}+m'g\cos\theta'+\lambda=0,$$

d'où

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}+mg\cos\theta-m'g\cos\theta'=0,$$

$$\lambda=m\left(-g\cos\theta+\frac{d^2x}{dt^2}\right);$$

et, observant que $\frac{d^2x'}{dt^2}=-\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$(m+m')\frac{d^2x}{dt^2}=g(m\cos\theta-m'\cos\theta'),$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g\,\frac{m\cos\theta-m'\cos\theta'}{m+m'}.$$

On tire de là en intégrant, et représentant par v la vitesse du point m,

$$\frac{dx}{dt}=v=gt.\frac{m\cos\theta-m'\cos\theta'}{m+m'}+c,$$

$$x=\frac{gt^2}{2}.\left(\frac{m\cos\theta-m'\cos\theta'}{m+m'}+ct+c'\right),$$

c et c' étant des constantes arbitraires qui se détermineront d'après l'état initial du système.

Soient x_0, v_0 les valeurs de x et v, pour $t=0$, on aura

$$c=v_0,\quad c'=x_0.$$

Si la vitesse v_0 est donnée ainsi que x_0, le problème est entièrement résolu, puisqu'on connaît x, et par suite x'; et la valeur de λ mesure la tension du fil, qui sera constante. Mais si l'on donnait seulement x_0 et les forces instantanées qui agissent sur les deux points matériels au commencement

du mouvement, il faudrait déterminer les vitesses initiales en exprimant qu'il y a équilibre entre les forces mesurées par les quantités de mouvement acquises, et les forces instantanées prises en sens contraires de leurs directions. Soient ω, ω' les vitesses que les forces instantanées communiqueraient respectivement aux deux points s'ils étaient libres; ces forces seront mesurées par $m\omega$, $m'\omega'$; et, en suivant la même marche que précédemment, on trouvera

$$m\frac{dx}{dt} - m'\frac{dx'}{dt} - m\omega + m'\omega' = 0, \quad \lambda = m\left(\frac{dx}{dt} - \omega\right),$$

et, en observant que $\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt}$,

$$(m + m')\frac{dx}{dt} = m\omega - m'\omega',$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m\omega - m'\omega'}{m + m'} = v_0.$$

La valeur de λ exprime la tension initiale produite par la percussion. Si l'on y remplace $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur que nous venons de déterminer, on aura

$$\lambda = \frac{-mm'}{m + m'}(\omega + \omega').$$

Si l'on suppose $\theta = 0$, $\theta' = 0$, le système n'est autre chose qu'une machine d'Atwood, dans laquelle on n'aurait pas égard à la masse de la poulie.

46. Considérons actuellement le cas où les deux corps réagissent l'un sur l'autre par l'intermédiaire d'un treuil, et se meuvent chacun dans un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans inclinés sur lesquels ils sont posés. Les équations données par le principe de d'Alembert seront alors, en désignant par r, r' les rayons des deux

sections,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + mg\cos\theta\delta x$$
$$+ m'g\cos\theta'\delta x' = 0,$$
$$r'\delta x + r\delta x' = 0;$$

d'où l'on déduit

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\cos\theta + \lambda r' = 0,$$
$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2} + m'g\cos\theta' + \lambda r = 0.$$

Éliminant λ, et observant que $\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{r'}{r}\frac{d^2x}{dt^2}$, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{(mr\cos\theta - m'r'\cos\theta')r}{mr^2 + m'r'^2}.$$

On achèverait la discussion comme dans le cas précédent.

47. Supposons maintenant une chaîne homogène posée sur les deux plans inclinés et glissant sans frottement, en restant dans un plan perpendiculaire à l'intersection des deux autres. Soient l la longueur de la chaîne, et ε sa masse pour l'unité de longueur; on aura

$$x + x' = l,$$

et, par suite,

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Les poids des deux parties de la chaîne seront respectivement $g\varepsilon x$, $g\varepsilon x'$, et les forces qui produiraient l'accélération qui a lieu seraient, pour chacune de ces parties, $\varepsilon x\frac{d^2x}{dt^2}$, $\varepsilon x'\frac{d^2x'}{dt^2}$. Le principe de d'Alembert donne alors, en sup-

primant le facteur commun ε,

$$-x\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - x'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + gx\cos\theta.\delta x + gx'\cos\theta'\delta x' = 0,$$

et, par suite,

$$-x\frac{d^2x}{dt^2} + gx\cos\theta + \lambda = 0, \quad -x'\frac{d^2x'}{dt^2} + gx'\cos\theta' + \lambda = 0;$$

d'où, en éliminant λ et x',

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}[x\cos\theta + (x-l)\cos\theta']$$
$$= \frac{g}{l}(\cos\theta + \cos\theta')\left(x - \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}\right).$$

Si l'on pose

$$\frac{g}{l}(\cos\theta + \cos\theta') = a^2, \quad x - \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'} = y,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2y;$$

d'où

$$y = \alpha e^{at} + \beta e^{-at},$$

et

$$x = \alpha e^{at} + \beta e^{-at} + \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}.$$

Les constantes α, β se détermineront par l'état initial. On trouvera, en faisant $t = 0$,

$$x_0 = \alpha + \beta + \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}, \quad v_0 = a(\alpha - \beta);$$

d'où l'on tirera α, β, si x_0 et v_0 sont donnés. Si l'on con-

naissait seulement les forces instantanées qui déterminent la vitesse initiale v_0, en supposant connue la position initiale, on agirait comme dans un des cas précédents.

La valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ sera nulle quand on aura

$$x = \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'},$$

et, par suite,

$$x' = \frac{l\cos\theta}{\cos\theta + \cos\theta'},$$

c'est-à-dire quand les deux longueurs x, x' seront proportionnelles aux longueurs des deux plans inclinés; et si la chaîne était d'abord placée dans cette position, sans vitesse initiale, elle y resterait constamment.

48. *Mouvement d'un fil flexible.* — Soit ε la masse de l'unité de longueur d'un fil dont tous les points sont sollicités par des forces dont les composantes, rapportées à l'unité de longueur, sont X, Y, Z, et dont les extrémités sont sollicitées par les forces $(X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2)$.

Un élément ds sera sollicité par les forces $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$; et par conséquent on devra avoir, d'après le principe de d'Alembert,

$$\begin{aligned}\int\left[\left(X - \varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right]ds \\ + X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 \\ + X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2 = 0,\end{aligned}$$

l'intégrale ayant pour limites les valeurs relatives aux extrémités du fil. On aura de plus $\delta\,ds = 0$, ou

$$\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y + \frac{dz}{ds}\,d\delta z = 0.$$

Cette équation a lieu pour tous les points du fil. Si on la multiplie par une indéterminée λ qui varie d'un point à l'autre, que l'on fasse ensuite la somme de cette équation et de la première, on aura

$$\int\left[\left(X-\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]ds$$
$$+\int\lambda\left(\frac{dx}{ds}\,d\delta x+\frac{dy}{ds}\,d\delta y+\frac{dz}{ds}\,d\delta z\right)$$
$$+X_1\delta x_1+Y_1\delta y_1+Z_1\delta z_1+X_2\delta x_2+Y_2\delta y_2+Z_2\delta z_2=0.$$

Si l'on intègre par parties les termes de la seconde intégrale qui a les mêmes limites que la première, elle devient

$$\lambda\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)$$
$$-\int\left(\delta x d.\lambda\frac{dx}{ds}+\delta y d.\lambda\frac{dy}{ds}+\delta z d.\lambda\frac{dz}{ds}\right).$$

Si l'on réunit les termes soumis au signe $\int$, on devra égaler à zéro les coefficients des quantités δx, δy, δz; et les termes qui ne sont soumis à aucune intégration et qui se rapportent aux deux limites, devront se détruire entre eux.

On aura donc d'abord les trois équations suivantes pour un point quelconque du fil :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(X-\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)ds-d.\lambda\frac{dx}{ds}=0,\\&\left(Y-\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)ds-d.\lambda\frac{dy}{ds}=0,\\&\left(Z-\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)ds-d.\lambda\frac{dz}{ds}=0,\end{aligned}\right.$$

et si les deux extrémités sont indépendantes l'une de l'au-

tre, on aura les deux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 \\ &\qquad -\lambda_1\left(\frac{dx_1}{ds_1}\delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1}\delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1}\delta z_1\right) = 0, \\ &X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2 \\ &\qquad +\lambda_2\left(\frac{dx_2}{ds_2}\delta x_2 + \frac{dy_2}{ds_2}\delta y_2 + \frac{dz_2}{ds_2}\delta z_2\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

Les équations (1) sont les mêmes que si un élément quelconque ds, au lieu d'être lié aux autres, était sollicité par une force ayant pour composantes

$$-\,d.\lambda\frac{dx}{ds},\quad -\,d.\lambda\frac{dy}{ds},\quad -\,d.\lambda\frac{dz}{ds},$$

ou encore par des forces tangentes à ses deux extrémités, et ayant pour composantes

$$+\lambda\frac{dx}{ds},\quad +\lambda\frac{dy}{ds},\quad +\lambda\frac{dz}{ds},$$

à la première extrémité, et

$$-\left(\lambda\frac{dx}{ds} + d.\lambda\frac{dx}{ds}\right),\ -\left(\lambda\frac{dy}{ds} + d.\lambda\frac{dy}{ds}\right),\ -\left(\lambda\frac{dz}{ds} + d.\lambda\frac{dz}{ds}\right),$$

à la seconde. L'effet de la liaison des éléments du fil est donc de produire en chaque point une tension exprimée par $-\lambda$.

Si l'on élimine λ entre les trois équations (1), on aura deux équations entre x, y, z, t, qui détermineront à chaque instant la position de tous les points du fil.

Quant aux équations (2), on commencera par réduire au plus petit nombre possible les variations qui y entrent, et l'on égalera à zéro leurs coefficients respectifs. On aura ainsi les équations qui détermineront à chaque instant la position des extrémités et les quantités arbitraires intro-

duites par l'intégration, en y joignant de plus les conditions relatives à l'état initial et à la longueur du fil.

Si les forces appliquées aux extrémités sont nulles, et que ces extrémités soient mobiles, on ne pourra satisfaire aux équations (2) qu'en posant $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ce qui apprend que les tensions extrêmes seront constamment nulles.

Il faut excepter le cas très-particulier où le fil serait constamment perpendiculaire à la ligne ou à la surface sur laquelle une de ses extrémités serait assujettie à se mouvoir; on aurait alors, à cette extrémité,

$$dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1 = 0,$$

et il ne serait plus nécessaire qu'on eût $\lambda_1 = 0$. Il en serait de même pour l'autre extrémité.

Si les extrémités sont fixes, les équations (2) sont satisfaites d'elles-mêmes. Mais alors on connaît x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, et l'on devra exprimer que les équations de la courbe sont satisfaites par ces valeurs, quel que soit t, ce qui contribuera à déterminer les quantités arbitraires.

49. On pourrait obtenir directement les équations précédentes. En effet, si l'on désigne par T la tension en un point quelconque, l'élément ds sera sollicité par des forces dont les composantes totales parallèles aux axes seront

$$X\,ds + d.T\frac{dx}{ds}, \qquad Y\,ds + d.T\frac{dy}{ds}, \qquad Z\,ds + d.T\frac{dz}{ds},$$

et le principe de d'Alembert appliqué à cet élément donnera

$$\left(X - \varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)ds + d.T\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\left(Y - \varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)ds + d.T\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\left(Z - \varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)ds + d.T\frac{dz}{ds} = 0,$$

équations qui ne diffèrent des équations (1) que par le changement de $-\lambda$ en T.

A chacun des points extrêmes du fil il devra y avoir équilibre entre toutes les forces qui le sollicitent, en y comprenant la tension; car un point géométrique sollicité par une force quelconque acquerrait, dans un temps fini quelconque, une vitesse infinie. De là résulteraient des équations identiques aux équations (2).

50. Considérons le cas particulier d'un fil dont l'extrémité A (*fig.* 6) est fixe, et qui passe en un autre point fixe B, sur lequel il peut glisser, et qui est à une distance l de A. Son prolongement est vertical et soutient un poids T qui mesure la tension du fil en un point quelconque, dans sa position d'équilibre, qui est la droite AB, si l'on suppose que les forces X, Y, Z soient nulles. Prenons la ligne AB pour axe des x, et le point A pour origine.

Cela posé, si l'on écarte infiniment peu le fil de la droite AB, en supposant que les tangentes aux différents points de la courbe qu'il affectera fassent des angles infiniment petits avec AB, il se trouvera allongé d'une quantité infiniment petite du second ordre, que l'on pourra négliger. Si l'on abandonne ensuite chaque point à lui-même, en lui imprimant une certaine vitesse initiale, on peut déterminer le mouvement qui en résultera.

D'abord il suit de l'hypothèse relative à la position initiale, qu'en négligeant les infiniment petits du second ordre, chaque point se mouvra dans un plan perpendiculaire à AB, et par conséquent le point du fil qui était primitivement en B pourra être considéré comme immobile. Donc x sera constant pour le point qui correspond à une valeur quelconque de l'arc s, et l'on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \text{et, par suite,} \qquad d.\lambda\frac{dx}{ds} = 0.$$

Mais on a $\frac{dx}{ds} = 1$, en négligeant les infiniment petits du second ordre; donc $d.\lambda = 0$, ou $\lambda = c$, ce qui apprend que la tension ne varie pas et est constamment égale au poids T.

Les deux dernières équations (1) deviennent, en remplaçant s par x, ce qui est permis, d'après ce que nous avons dit,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon}\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Si l'on suppose, pour plus de simplicité, que la figure initiale du fil soit renfermée dans un même plan, dans lequel on prendra l'axe des y, on n'aura plus à considérer que l'équation unique

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon}\frac{d^2y}{dx^2},$$

dont l'intégrale est

$$(3) \qquad y = F\left(x + t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right) + f\left(x - t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right),$$

F et f désignant des fonctions arbitraires qui se détermineront d'après les positions et les vitesses initiales de tous les points du fil. Si la figure initiale du fil est exprimée, entre A et B, par l'équation $y = \varphi(x)$, et si la vitesse initiale du point dont l'abscisse est x a pour expression $\psi(x)$, il faudra que l'équation (3) donne $y = \varphi(x)$ et $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$ pour $t = 0$, ce qui conduit aux équations

$$F(x) + f(x) = \varphi(x), \qquad \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\left[F'(x) - f'(x)\right] = \psi(x);$$

d'où l'on déduira facilement $F(x)$ et $f(x)$, au moyen de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Mais ces dernières n'étant données que pour les valeurs de la variable, comprises entre o et l, il en serait de même des fonctions F et f; de sorte que y ne serait pas connu pour toutes les valeurs de t. Nous verrons plus tard comment les conditions relatives aux extrémités permettent de déterminer les fonctions φ et ψ pour toute valeur de la variable. Ces discussions, toutes spéciales, nous écarteraient de notre objet.

CHAPITRE XV.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME.

51. Si tous les points matériels qui composent le système étaient entièrement libres et indépendants les uns des autres, on rentrerait dans la théorie du mouvement relatif d'un point libre; et il suffirait d'introduire en chaque point les deux forces fictives, définies dans le n° 330, pour que le mouvement relatif du système fût ramené à un mouvement absolu.

52. Supposons maintenant que certains points du système soient assujettis seulement à rester sur des surfaces ou des courbes données, fixes ou mobiles, constantes ou variables de forme. Il en résultera pour ces points des forces inconnues normales à ces surfaces ou à ces courbes. Si l'on en connaissait les valeurs, en les joignant aux forces données, les points pourraient être considérés comme libres, et l'on rentrerait dans le cas précédent. Il suffirait donc d'introduire en chaque point les deux forces fictives dépendantes du mouvement des axes, et l'on serait encore ramené au mouvement absolu. Mais, bien que ces forces normales soient inconnues, on peut toujours les introduire comme si elles étaient connues. Le nombre des quantités à déterminer sera augmenté; mais le nombre des équations le sera également.

En effet, les coordonnées d'un point assujetti à rester sur une surface doivent constamment satisfaire à l'équation de cette surface. Si le point est assujetti à rester sur deux surfaces ou, en d'autres termes, sur une courbe donnée, il s'introduit deux forces inconnues, normales à ces deux surfaces; mais, en même temps, on a deux équations entre ses coordonnées : de sorte que le nombre des équations augmentera toujours autant que celui des inconnues, et le problème sera entièrement déterminé. Les équations de ces surfaces ou de ces courbes pourront être données en fonction du temps et des coordonnées absolues ou relatives, et on les exprimera dans celui que l'on voudra de ces deux systèmes, au moyen des formules de la transformation des coordonnées.

53. Si deux points du système étaient assujettis à rester à une distance constante l'un de l'autre, comme cela arrive souvent, il naîtrait de là deux forces égales et contraires, dirigées suivant la droite qui joint ces points et appliquées respectivement à chacun d'eux. En introduisant ces forces, les points peuvent être considérés comme libres, mais on devra exprimer que leur distance est constante; ce qui fournit une nouvelle équation en même temps qu'il s'est introduit une nouvelle inconnue qui est la grandeur de la force. Ces conditions peuvent se multiplier indéfiniment. Le même point peut être lié à un nombre quelconque d'autres points, et assujetti à rester sur une ou sur deux sufaces. Chacune de ces conditions introduira toujours une inconnue et une équation, et le problème sera déterminé. De ce qui précède, on déduit la proposition suivante :

Lorsque divers points d'un système en mouvement sont assujettis à rester à des distances constantes les unes des autres, ou à demeurer sur des surfaces ou des lignes variables de position et de forme, le mouvement de ce système

relativement à trois axes mobiles, sera identique à un mouvement absolu qu'on déterminera de la manière suivante par rapport à des axes fixes : On fera partir le système d'un état initial identique à l'état relatif initial; on appliquera d'abord en chaque point des forces dont les composantes seront exprimées par les mêmes fonctions du temps et des nouvelles coordonnées absolues, que les forces données le sont au moyen des coordonnées relatives; on y joindra les forces fictives telles qu'elles ont été déterminées dans le cas d'un point libre : enfin, les points seront assujettis à conserver les distances données les uns avec les autres, et à se mouvoir sur des surfaces ou des courbes ayant pour équations, par rapport aux axes fixes, les équations données exprimées en coordonnées relatives aux axes mobiles.

54. *Cas général.* — Les conditions que nous venons d'examiner sont celles qui se rencontrent le plus ordinairement. C'est pour cela seulement que nous les avons présentées en premier lieu, car nous aurions pu commencer par le cas, tout à fait général, dont nous allons maintenant nous occuper.

Supposons que les liaisons du système soient exprimées par des équations renfermant le temps et les coordonnées absolues x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'',... d'un nombre quelconque de points, M, M', M'',.... Nous avons démontré que le mouvement absolu sera le même que si l'on supprimait les liaisons et que l'on introduisît en chaque point des forces déterminées par les équations qui expriment ces liaisons. Ces forces, pour un point quelconque M ayant pour coordonnées x, y, z par rapport à un système quelconque d'axes, sont normales aux différentes surfaces que l'on obtient à l'instant que l'on considère, en considérant x, y, z comme seules variables dans toutes les équations

où elles entrent; et les valeurs des composantes de ces forces, parallèlement aux x, y, z, sont les produits des dérivées partielles de ces équations, relativement à x, y, z, par un facteur commun qui n'est pas donné, et qui est le même pour toutes les dérivées provenant de la même équation; en sorte qu'il y a autant de ces inconnues qu'il y a d'équations; et qu'il est possible, par conséquent, de déterminer, non-seulement les coordonnées de tous les points à chaque instant, mais encore les grandeurs et les directions des forces qui pourraient être substituées aux liaisons, et permettre ainsi de considérer tous les points comme entièrement libres.

Tout cela étant rappelé, il est clair que si nous concevons introduites ces forces qui remplacent les liaisons, nous retombons dans le premier cas; et le mouvement relatif cherché coïncide avec un mouvement absolu dans lequel ces mêmes forces seraient ajoutées aux proposées et aux forces fictives qui se rapportent au mouvement relatif d'un point libre. Mais comme les forces provenant des liaisons renferment des inconnues nouvelles en nombre égal à celui des équations données, il faudra employer ces équations à leur détermination, afin d'avoir en tout autant d'équations que d'inconnues.

Observons maintenant que si, dans toutes ces équations où nous avons supposé qu'il n'entrait que des coordonnées absolues, on remplace celles-ci par les coordonnées relatives, au moyen des formules ordinaires de la transformation des coordonnées, rien ne sera changé dans les conditions des liaisons. Or, à un instant quelconque, on peut supposer qu'on prenne pour axes de coordonnées trois droites coïncidant avec les axes mobiles dans la position qu'ils occupent à cet instant. Les équations de liaison seront les équations proposées exprimées au moyen des coordonnées relatives. Les forces à introduire auront leurs compo-

santes suivant ces axes, représentées par les dérivées partielles des équations par rapport aux coordonnées relatives, multipliées par des facteurs communs en même nombre que ces équations, comme nous l'avons rappelé en détail tout à l'heure. D'où l'on conclut la proposition suivante :

Le mouvement relatif d'un système de points, liés par des équations quelconques entre le temps et les coordonnées de ces points par rapport aux axes mobiles, est identique à un mouvement absolu du même système, en supposant : 1° qu'il parte d'un état initial identique à l'état relatif initial; 2° qu'il soit soumis à l'action des forces dont les composantes sont exprimées par les mêmes fonctions des coordonnées des points, que celles des forces données le sont au moyen des coordonnées relatives; 3° qu'on y joigne les forces fictives; 4° et en supposant enfin le système assujetti à des liaisons exprimées par des équations renfermant les coordonnées actuelles de la même manière que les équations données renferment les coordonnées relatives.

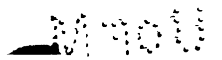
CHAPITRE XVI.

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

55. Quelles que soient les liaisons d'un système en mouvement, nous avons vu qu'il y avait constamment équilibre, en vertu de ces liaisons, entre les forces ayant pour composantes

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Or, cet équilibre ne serait pas troublé si l'on ajoutait de nouvelles liaisons qui rendissent rigide le système des



points ; donc les équations qui exprimeraient alors l'équilibre ont réellement lieu quand on laisse les liaisons telles qu'elles sont données.

En appliquant cette considération au cas d'un système entièrement libre dans l'espace, on obtient deux propositions importantes qui se rapportent au mouvement du centre de gravité du système, et aux aires décrites par les rayons vecteurs de tous les points qui le composent.

Les équations qui déterminent l'équilibre d'un système rigide libre sont au nombre de six. Les trois premières expriment que les sommes des composantes des forces respectivement parallèles aux trois axes sont nulles séparément ; les trois dernières, que les sommes des moments des forces sont nulles par rapport à chacun des mêmes axes rectangulaires. Nous allons examiner successivement les conséquences de ces deux espèces de conditions.

56. *Mouvement du centre de gravité.* — Les trois premières équations dont nous venons de parler sont

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0, \quad \sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$
$$\sum\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0;$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Les premiers membres de ces équations peuvent être transformés en introduisant les coordonnées x_1, y_1, z_1 du *centre de gravité* du système proposé, en entendant par là le point qui, à une époque quelconque du mouvement, deviendrait le centre de gravité du système, si on liait instantanément tous les points entre eux.

En effet, les coordonnées de ce point satisferont aux équations

$$(2)\qquad \Sigma mx = M x_1,\quad \Sigma my = M y_1,\quad \Sigma mz = M z_1,$$

M désignant la somme totale des masses du système.

Ces équations ayant lieu à chaque instant, on pourra les différentier par rapport au temps, et l'on trouvera

$$(3)\quad \Sigma m\frac{dx}{dt} = M\frac{dx_1}{dt},\quad \Sigma m\frac{dy}{dt} = M\frac{dy_1}{dt},\quad \Sigma m\frac{dz}{dt} = M\frac{dz_1}{dt},$$

et, en les différentiant de nouveau,

$$(4)\ \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{d^2x_1}{dt^2},\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = M\frac{d^2y_1}{dt^2},\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = M\frac{d^2z_1}{dt^2},$$

d'où, en vertu des équations (1),

$$(5)\qquad M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y,\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z;$$

équations qui expriment que les composantes de l'accélération du mouvement du centre de gravité sont identiques à celles que l'on trouverait pour un point dont la masse serait M, et qui serait sollicité par toutes les forces données, transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. Si donc on supposait un point ayant une masse M, partant de la position initiale du centre de gravité, avec la même vitesse dans la même direction, ses coordonnées seraient déterminées par les mêmes équations que celles du centre de gravité, et ces deux points coïncideraient à chaque instant.

Quant à ce qui se rapporte au mouvement initial, supposons qu'il soit produit par des forces instantanées, ayant pour composantes A, B, C au point m; A', B', C' au point m', et ainsi des autres, ces forces pouvant d'ailleurs être nulles pour un nombre quelconque de ces points. Si l'on

remplace dans ce qui précède les forces continues par les forces instantanées, on aura, au lieu des équations (1), les suivantes :

$$(6)\qquad \Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma A,\quad \Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma B,\quad \Sigma m\frac{dz}{dt}=\Sigma C;$$

d'où résulte, d'après les équations (3), qui ont lieu depuis le commencement du mouvement, et que nous considérerons à cet instant même,

$$(7)\qquad M\frac{dx_1}{dt}=\Sigma A,\quad M\frac{dy_1}{dt}=\Sigma B,\quad M\frac{dz_1}{dt}=\Sigma C,$$

équations qui sont les correspondantes des équations (5).

On voit donc que les composantes de la vitesse initiale du centre de gravité sont les mêmes qu'elles seraient pour un point ayant la masse M, et sollicité par toutes les forces instantanées qui déterminent les vitesses initiales du système partant du repos, ces forces étant transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. En réunissant ces deux propositions, on aura le principe suivant :

Le mouvement du centre de gravité d'un système libre quelconque est le même que si l'on y réunissait toutes les masses des différents points, et qu'on y transportât, parallèlement à elles-mêmes, les forces instantanées et les forces continues, qui produisent l'état initial et les états subséquents du système.

Si les liaisons d'un système sont telles, qu'à chaque instant les points puissent être déplacés simultanément et parallèlement à une droite fixe, le théorème précédent aura lieu pour le mouvement du centre de gravité, parallèlement à cette droite. Car, en la prenant pour axe des z, et faisant $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ dans l'équation (1), page 77, on aura

$$\sum\left(z - m\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

et δz étant le même pour tous les points,

$$\Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma Z,$$

d'où

$$M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z;$$

d'où l'on tire la conséquence annoncée.

Remarque. — Il est bon de faire une remarque qui pourra se reproduire souvent, au sujet des forces instantanées, c'est-à-dire de forces considérables dont on considère l'effet pendant un temps inappréciable. La conséquence que nous avons tirée des équations (5) étant appliquée à ce genre de forces pendant le temps très-court qu'elles emploient à produire les vitesses initiales, démontrerait que les composantes de ces vitesses sont précisément les mêmes que si toutes les masses étaient réunies au centre de gravité du système, et que toutes les forces fussent transportées en ce point sans changer de manière d'agir. Mais cette démonstration revient à faire une intégration relative à chacune des composantes de la vitesse du centre de gravité; et c'est ainsi, en effet, que l'équation (7) se déduit de l'équation générale (5) qu'on appliquerait à des forces très-grandes agissant dans un temps très-court. Et l'équation même qui nous servira dans toutes les questions où il entrera des forces instantanées, c'est-à-dire l'application du principe de d'Alembert à ce genre de forces, a été obtenue par une intégration analogue faite sur l'équation qui se rapporte aux forces continues. Mais une fois ce point bien entendu, il est préférable de ne plus revenir à chaque instant sur ce même raisonnement, et d'introduire directement les forces instantanées comme nous avons appris à le faire; c'est pour cela que nous avons écrit les équations (6) et (7), dont nous

aurions pu nous passer au moyen du raisonnement précédent, mais que nous aurions pu aussi poser les premières, en partant de l'état initial, avant de considérer les états subséquents du système.

Si le système renfermait des points, des lignes ou des surfaces fixes, on pourrait le considérer comme libre, en introduisant les forces qui résulteraient de ces conditions; et le théorème précédent subsisterait bien encore : mais il faudrait ainsi avoir égard à des forces qui ne sont pas données, et qui ne seront connues que quand le mouvement sera déterminé.

57. Il résulte de là que si aucune force extérieure n'est appliquée au système, et, plus généralement, si les forces qui y sont appliquées se détruisent quand on les transporte en un même point, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme. Sa direction est donc celle de sa vitesse initiale, et, par conséquent, de la résultante des forces instantanées qui ont mis le système en mouvement, ou encore, des forces instantanées qui lui donneraient, à un instant quelconque, le mouvement dont il est animé.

Lorsque les points du système exerceront les uns sur les autres des actions réciproques, égales et contraires, continues ou instantanées, le mouvement du centre de gravité n'en sera pas altéré, puisque ces forces, transportées en ce point, s'y détruiraient deux à deux. Ainsi des chocs, ou des liaisons subites établies entre plusieurs corps du système, ou encore des explosions intérieures, produisant nécessairement des actions égales et contraires, ne sauraient modifier en rien le mouvement du centre de gravité. C'est en cela que consiste le principe de *la conservation du mouvement du centre de gravité*.

Il est essentiel d'observer que toutes les propositions pré-

cédentes sont indépendantes de la nature des forces et des lois de leur action.

58. *Principe de la conservation des moments.* — Considérons maintenant les trois dernières équations d'équilibre, qui expriment que les sommes des moments des forces $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, etc., par rapport aux trois axes, sont nulles. Ces équations sont

$$\Sigma\left[y\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) - z\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[z\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

et peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY), \\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ), \\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(xY - yX). \end{array}\right.$$

Ces équations ont lieu à chaque instant du mouvement; elles expriment que les sommes des moments des forces données, par rapport aux trois axes, sont égales à celles des moments des forces qui produiraient sur les points libres le mouvement qui a lieu.

Nous nous occuperons particulièrement du cas où les seconds membres des équations (1) sont nuls. Cela aura lieu d'abord si les forces X, Y, Z, .. sont toutes nulles, c'est-à-dire si le système qui a été mis en mouvement est abandonné à lui-même, sans aucune action étrangère.

Cela aura lieu encore si les points sont soumis à des actions qui seraient en équilibre sur le système rendu rigide; car ces seconds membres sont les sommes des moments des forces par rapport aux axes, et ces sommes sont nulles si les forces sont en équilibre. Cela comprend le cas d'actions mutuelles égales et de sens contraires, et, par conséquent, de chocs quelconques entre les diverses parties du système.

Enfin, ces seconds membres sont encore nuls si toutes les forces appliquées aux divers points du système passent par un même point, choisi pour origine des coordonnées. En effet, les composantes X, Y, Z d'une quelconque d'entre elles étant proportionnées aux coordonnées du point d'application, on aura

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0.$$

On voit même qu'il suffirait que les forces eussent une résultante passant par l'origine. De sorte que les seconds membres des équations (1) seront nuls toutes les fois que les forces seraient en équilibre sur le système rendu rigide, et lié au point fixe qui a été pris pour origine.

Le cas dont nous allons nous occuper a donc encore une assez grande généralité.

Les équations (1) deviennent, dans cette supposition,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0, \\ &\Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0, \\ &\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0; \end{aligned} \right.$$

intégrant par rapport à t, et représentant par c, c', c'' trois

constantes, on obtiendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c,\\ &\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=c',\\ &\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=c''.\end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de ces équations sont les sommes des moments, par rapport aux axes, des forces dont les composantes seraient exprimées pour chaque point par $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire des forces instantanées, qui produiraient sur chaque point libre, et partant du repos, le mouvement dont il est animé.

Ainsi, les équations (3) expriment que *les sommes des moments des quantités de mouvement qui animent le système à un moment quelconque, estimées par rapport à trois axes rectangulaires, sont constantes; et que, par conséquent, il en est de même par rapport à toute direction*. Ou, en d'autres termes, si, à un instant quelconque, on considère les forces instantanées qui produiraient sur chaque point libre, et, partant du repos, le mouvement dont il est animé; que l'on décompose chacune de ces forces en trois autres, dirigées suivant les axes des coordonnées, et en trois couples, ayant ces mêmes directions pour axes; la somme des moments des couples dans chacune de ces directions sera constante; et, par suite, l'axe du couple résultant sera constant en grandeur et en direction.

C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des moments*. Il subsiste, quelles que soient les actions mutuelles qui viennent à naître entre des points du système, comme par exemple si deux points étaient liés subitement l'un à l'autre, si une partie du système, d'abord gazeuse,

devenait liquide, puis solide, pourvu que cela s'opérât par des actions, deux à deux, égales et contraires; ou encore si le changement de température des différents points d'un système changeait leurs actions mutuelles, et, par suite, leurs distances. Ces diverses circonstances se présentent dans le système du monde.

Il est inutile de rappeler que les sommes des moments seraient les mêmes pour tout système de forces instantanées, produisant le même mouvement, puisque, d'après le principe de d'Alembert, ce dernier système serait en équilibre avec l'autre pris en sens contraire.

59. Il résulte de ce qui précède que si, à un instant quelconque, on considère comme des forces les quantités de mouvement qui animent les différents points du système, et qu'on les compose comme si elles étaient appliquées à un système rigide, on trouvera toujours la même résultante et le même couple résultant, par rapport à une même origine.

Si l'on applique à ces forces les propositions qui ont été établies dans la Statique relativement à la réduction d'un système quelconque de forces, on obtiendra les conséquences suivantes :

Lorsqu'un système libre quelconque est sollicité par des forces qui se détruiraient mutuellement s'il devenait rigide,

La somme des forces représentées par les quantités de mouvement de ses différents points, estimées dans une même direction, est constante.

Le centre de gravité du système se meut parallèlement à la résultante des quantités de mouvement, transportées en un même point.

La somme des moments de ces quantités de mouvement par rapport à une même droite est constante.

Si l'on considère ces moments par rapport à toutes les droites qui passent par un même point de l'espace, celle pour laquelle la somme est la plus grande est invariable : c'est l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, relatif à cette origine. Cette direction, ainsi que la valeur du moment total correspondant, sont les mêmes pour tous les points de la parallèle à la résultante, menée par ce même point. La direction peut être la même, sans que le moment soit le même, dans le seul cas où les forces représentées par les quantités de mouvement sont réductibles à une force unique. Dans ce cas, tous les points du plan mené par cette force et le point que l'on considère, donneront une même direction pour l'axe du moment maximum; mais le moment ne sera le même en grandeur et en direction que pour les points d'une même parallèle à la résultante.

Il existe un *axe central* unique, parallèle à la résultante, et tel que pour tous ses points sa direction est celle de l'axe du moment maximum; et ce moment est moindre que le maximum relatif à tout autre point de l'espace. Il se détermine facilement dès qu'on connaît la résultante et le couple résultant relatif à une origine donnée. Dans le cas où le système des forces représentées par les quantités de mouvement est réductible à une force unique, la droite suivant laquelle elle agit est l'axe central.

Conservation des moments dans le mouvement relatif. — Supposons maintenant que les axes auxquels on rapporte la position des points, se meuvent en restant parallèles à eux-mêmes, le mouvement relatif sera identique au mouvement absolu qu'on obtiendrait en partant d'un état initial identique à l'état relatif initial, et introduisant les forces fictives, déterminées précédemment. Dans le cas actuel, où les axes n'ont qu'un mouvement de

translation, les forces fictives se réduiront, pour chaque point du système, à une force accélératrice égale, parallèle, et de sens contraire à celle qui donnerait à un point matériel libre le mouvement que suit l'origine des axes mobiles.

Lorsque ces forces réunies aux forces données seront en équilibre sur le système rigide, ou donneront une résultante passant constamment par l'origine mobile, le principe de la conservation des moments aura lieu dans le mouvement relatif.

Supposons toujours que les forces données soient en équilibre sur le système rigide. Il sera nécessaire alors que les forces fictives soient en équilibre sur ce même système, ou bien qu'elles donnent une résultante qui passe constamment par l'origine mobile.

Or, ces forces se composent en une seule, appliquée au centre de gravité du système, parallèle et de sens contraire à la force accélératrice qui produirait le mouvement de l'origine, et égale au produit de cette force par la masse du système. Il est donc nécessaire et suffisant que cette dernière force soit nulle, pour que les autres soient en équilibre. Dans ce cas, l'origine a un mouvement rectiligne uniforme, entièrement arbitraire. On obtient ainsi la proposition suivante:

Lorsque les forces appliquées à un système libre s'y détruisent lorsqu'il devient rigide, le principe de la conservation des moments a lieu dans le mouvement relatif à tout système d'axes qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, de manière que leur point de rencontre ait un mouvement quelconque rectiligne et uniforme.

Le centre de gravité du système ayant, d'après l'hypothèse, un mouvement rectiligne uniforme, il s'ensuit que le principe a lieu pour un système d'axes de directions constantes

et dont l'origine coïncide constamment avec le centre de gravité du système.

Le même principe aura encore lieu lorsque la résultante des forces fictives, au lieu d'être nulle, passera constamment par l'origine; ce qui exige que la droite menée par le centre de gravité du système, parallèlement à la force accélératrice de l'origine, passe toujours par cette origine même.

On peut donc énoncer cette seconde proposition :

Le principe de la conservation des moments a lieu, dans le mouvement relatif, lorsque les axes se déplacent parallèlement à eux-mêmes, et que la force qui produirait le mouvement de l'origine passe constamment par le centre de gravité du système.

Ce principe a donc lieu dans le cas particulier où l'origine a *un mouvement arbitraire sur la droite que décrit le centre de gravité.*

Cette dernière proposition renferme, comme cas très-particulier, une des précédentes, où l'on supposait que l'origine était au centre de gravité lui-même.

On peut remarquer que le principe démontré dans ce numéro renferme celui du numéro précédent. Il suffit, pour l'obtenir, de supposer nulle la force dirigée vers le centre de gravité.

60. *Cas où le moment a la même valeur que si l'origine était immobile.* — Les deux propositions précédentes se rapportent seulement à l'invariabilité des moments relatifs; mais on pourrait ajouter encore la condition que ces moments fussent les mêmes que si l'origine restait en repos. Voyons s'il est possible d'y satisfaire.

Prenons pour axes fixes des x, y, z une des positions des axes mobiles; soient α, β, γ les coordonnées de l'origine mobile, à une époque quelconque. La somme des moments,

par rapport à l'axe des x, sera

$$(a)\qquad \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right).$$

La somme des moments relatifs à l'axe mobile parallèle au précédent sera

$$(b)\qquad \Sigma m[(y-\beta)\,d(z-\gamma)-(z-\gamma)\,d(y-\beta)].$$

On aura de même les moments relatifs aux deux autres axes, fixes ou mobiles.

Or, si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, et par M la masse totale du système, la différence des expressions (a) et (b) se réduit à

$$M\left(z_1\frac{d\beta}{dt}-y_1\frac{d\gamma}{dt}\right)+M\left(\gamma\frac{dy_1}{dt}-\beta\frac{dz_1}{dt}\right)+M\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Il s'ensuit que pour que les deux expressions (a) et (b) soient égales, il faut que l'on ait

$$z_1\frac{d\beta}{dt}-y_1\frac{d\gamma}{dt}+\gamma\frac{dy_1}{dt}-\beta\frac{dz_1}{dt}+\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}=0.$$

Or, on satisfera d'une manière particulière à cette équation en posant séparément

$$z_1\frac{d\beta}{dt}-y_1\frac{d\gamma}{dt}=0,\quad \gamma\frac{dy_1}{dt}-\beta\frac{dz_1}{dt}=0;\quad \beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}=0,$$

ou

$$y_1 : z_1 :: d\beta : d\gamma,\quad \beta : \gamma :: dy_1 : dz_1,\quad \beta : \gamma :: d\beta : d\gamma.$$

En faisant de même pour les deux autres axes, on voit qu'on satisfera à toutes les conditions en posant

$$\alpha : \beta : \gamma :: d\alpha : d\beta : d\gamma :: dx_1 : dy_1 : dz_1 :: x_1 : y_1 : z_1,$$

ce qui exige seulement que le centre de gravité et l'origine se meuvent sur une même droite passant par le point qui a été pris pour origine fixe.

On obtient ainsi la proposition suivante :

Lorsque l'origine se meut d'une manière quelconque sur la droite décrite par le centre de gravité du système, les moments relatifs ont la même valeur que si cette origine restait fixe.

On en déduit, comme cas particulier, cette autre proposition :

Les moments relatifs à des axes de directions constantes qui se meuvent et se coupent au centre de gravité, sont les mêmes que si ces axes restaient immobiles dans une quelconque de leurs positions.

61. *Conservation des aires.* — Les équations (3) peuvent être envisagées sous un autre point de vue, et démontrent une propriété géométrique remarquable du mouvement en question. En effet, si l'on considère l'aire conique décrite par le rayon vecteur mené de l'origine au point dont les coordonnées sont x, y, z, elle se projette sur les plans coordonnés suivant les aires décrites par les projections de ce rayon, et dont nous allons calculer les expressions.

Soit θ l'angle formé avec l'axe des y positifs par la projection r du rayon vecteur sur le plan YZ, et qui tourne de l'axe des y positifs vers l'axe des z positifs, ce qui est le sens direct par rapport à l'axe des x positifs; on aura $\tang \theta = \frac{z}{y}$, les signes de toutes les quantités étant pris de la manière ordinaire.

On tire de cette équation

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{ydz - zdy}{y^2};$$

et comme $y = r\cos\theta$, on aura

$$r^2 d\theta = y dz - z dy.$$

Donc $y dz - z dy$ est le double de la différentielle de l'aire décrite par le rayon r; elle est de même signe que $d\theta$, et, par conséquent, positive quand le mouvement est direct, et négative quand il est rétrograde.

Or, si l'axe de l'aire plane infiniment petite, décrite dans l'espace, fait un angle aigu avec l'axe des x, la projection du rayon vecteur sur le plan YZ aura un mouvement direct; et si l'angle est obtus, ce mouvement sera rétrograde : donc $y dz - z dy$ est égal, en grandeur et en signe, au double de l'aire infiniment petite décrite dans l'espace, multipliée par le cosinus de l'angle formé par l'axe de cette aire avec l'axe des x positifs.

Cela posé, si l'on désigne par λ, λ', λ'' les sommes des aires décrites par les projections des rayons vecteurs sur les plans coordonnés, et multipliées chacune par la masse du point correspondant, les équations (3) pourront être mises sous la forme

$$\frac{d\lambda}{dt} = c, \qquad \frac{d\lambda'}{dt} = c', \qquad \frac{d\lambda''}{dt} = c'';$$

d'où

$$\lambda = ct, \qquad \lambda' = c't, \qquad \lambda'' = c''t,$$

en comptant les aires à partir de $t = 0$.

Ainsi, lorsque les points d'un système libre ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, ce qui comprend les chocs entre les divers points du système, et, plus généralement, lorsqu'ils sont soumis à des forces qui seraient en équilibre sur le système devenu rigide, et lié invariablement à l'origine, ce qui comprend le cas de forces quelconques dirigées vers l'origine; la somme des projections des aires décrites par les rayons vecteurs de tous les points, multipliées res-

pectivement par les masses de ces points, est proportionnelle au temps, pourvu que l'on regarde comme positives les aires décrites d'un mouvement direct, et comme négatives celles qui sont décrites d'un mouvement rétrograde. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation des aires*. On voit qu'il ne diffère que par la forme du principe de la conservation des moments.

62. S'il y avait deux centres d'action, lors même que l'un d'eux serait pris pour origine, les seconds membres des équations (1) ne seraient plus nuls. Mais l'un d'eux disparaîtra si l'on prend pour axe des z la droite qui passe par les deux centres fixes; car on aura

$$X : Y :: x : y, \quad \text{ou} \quad xY - yX = 0.$$

Donc, dans ce cas, le principe a lieu seulement pour les projections sur un plan perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres d'actions, et les couples provenant des quantités de mouvement du système, décomposés suivant les trois axes, donneraient un couple constant suivant l'axe qui passe par ces deux points.

63. *Plan invariable.* — Si l'on cherche le plan sur lequel la somme des projections des aires multipliées par les masses est la plus grande, on trouve, d'après les théorèmes démontrés dans les préliminaires, que les cosinus des angles p, q, r, que la direction de son axe forme avec les axes de coordonnées, sont

$$\cos p = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}},$$

$$\cos q = \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}},$$

$$\cos r = \frac{\lambda''}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}},$$

ou

$$\cos p = \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\cos q = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\cos r = \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}.$$

La direction de ce plan est donc indépendante du temps, et Laplace, qui l'a reconnu le premier, lui a donné le nom de *plan invariable*. Les équations (3) montrent qu'on pourra le déterminer si, à un certain instant, on connaît les masses des différents points du système, leurs positions et les composantes de leurs vitesses. Les actions mutuelles des points, et les chocs qui peuvent survenir entre eux ne changent pas la direction du plan invariable, puisque les seconds membres des équations ne cessent pas d'être nuls. Il en est de même s'il y a un centre fixe d'action ou un point fixe, pourvu qu'on le prenne pour origine.

On voit que ce plan n'est autre chose que celui du couple résultant des quantités de mouvement, et toutes les propositions qui ont été établies pour ce dernier s'appliqueront identiquement à l'autre. Nous nous dispenserons de les rappeler.

64. *Application au système du monde.* — En considérant le soleil, les planètes et leurs satellites comme sollicités seulement par leurs actions mutuelles, le centre de gravité de ce système se meut uniformément en ligne droite avec une vitesse qui dépend de celles qui ont été imprimées à tous ces corps, lorsqu'ils ont été abandonnés à eux-mêmes. Comme nous ne connaissons aucun point fixe, si nous voulons prendre une origine des aires qui donne pour le plan du maximum des aires une direction inva-

riable, il faut choisir un point qui se meuve parallèlement à la droite que décrit le centre de gravité; et comme cette droite n'est pas connue, il faudra choisir le centre de gravité lui-même. Le plan du couple résultant des quantités de mouvement relatives, ou, en d'autres termes, celui du maximum des aires relatives, pourra se déterminer à une époque quelconque; et comme il sera toujours le même, si l'on y rapporte tous les points du système, il pourra servir à comparer les observations astronomiques faites aux époques les plus éloignées.

Il est bon de remarquer que ce plan, étant indépendant de la grandeur des actions mutuelles, ne changerait pas, lors même que la loi d'attraction de la matière varierait; il est aussi indépendant des changements qui peuvent survenir dans la figure des corps célestes, parce qu'ils proviendront toujours de forces égales deux à deux et de sens contraire. Les parties liquides ou gazeuses pourraient se lier invariablement à la partie solide d'une planète; les planètes pourraient se lier entre elles ou se choquer d'une manière quelconque; elles pourraient être brisées par des explosions, sans que ce plan fût dérangé.

Il resterait encore le même si l'on supposait tous les corps du système sollicités par des forces parallèles et proportionnelles aux masses; car les mouvements rapportés à trois axes menés par le centre de gravité dans des directions constantes ne seraient pas altérés, et, par conséquent, les aires projetées sur ces plans resteraient les mêmes.

65. *Équation des forces vives.* — Cette équation s'obtient en considérant un déplacement virtuel particulier, qui n'est pas toujours compatible avec les liaisons du système. C'est celui qui coïnciderait avec le déplacement qui s'opère pendant un temps infiniment petit dans le mouvement réel de ce système.

Pour reconnaître quand ce déplacement virtuel est permis, soit $L = 0$ une des équations de condition données. Les déplacements virtuels satisferont à l'équation

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0;$$

et lors même que L renfermerait la variable t explicitement, on ne la ferait pas varier dans cette équation, puisque les déplacements virtuels se rapportent au même instant.

Si maintenant on désigne par dx, dy, dz, etc., les accroissements infiniment petits que prennent les coordonnées pendant le temps dt dans le mouvement effectif du système, l'équation $L = 0$ devant constamment être satisfaite, l'accroissement de son premier membre, après le temps dt, doit être nul, ce qui donne, en supposant, pour plus de généralité, que la variable t y entre explicitement,

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx'}dx' + \ldots = 0.$$

Or ces deux équations seraient contradictoires si l'on prenait

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \ldots,$$

et cette supposition ne sera permise que si l'on a $\frac{dL}{dt} = 0$, quel que soit t. D'où l'on conclut qu'on peut prendre pour déplacement virtuel le déplacement infiniment petit que subissent en même temps les points du système, en continuant leur mouvement, dans le cas seulement où aucune des équations de condition ne renferme le temps d'une manière explicite.

Supposons donc qu'il en soit ainsi, et, dans l'équation

générale

$$\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

faisons

$$\delta x = dx,\quad \delta y = dy,\quad \delta z = dz,$$

il vient

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=\Sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz).$$

Or le premier membre est la moitié de la différentielle de

$$\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\quad \text{ou de}\quad \Sigma mv^2,$$

v désignant la vitesse du point dont la masse est m; et l'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$(1)\qquad \tfrac{1}{2}\,d\,\Sigma mv^2 = \Sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz).$$

Elle montre *que l'accroissement de la demi-somme des forces vives de tous les points dans un intervalle de temps infiniment petit, est égal à la somme algébrique des quantités de travail des forces données, développées dans ce même intervalle.*

66. Lorsque l'expression $\Sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ est la différentielle exacte d'une fonction φ de x, y, z, x', y', z',..., considérées comme variables indépendantes, on pourra intégrer les deux membres de l'équation précédente, entre deux époques quelconques, et l'on aura

$$(2)\quad \tfrac{1}{2}\,\Sigma mv^2-\tfrac{1}{2}\,\Sigma mv_0^2=\varphi\,(x,y,z,x',\ldots)-\varphi\,(x_0,y_0,z_0,x'_0,\ldots).$$

Ainsi, dans ce cas, l'accroissement de force vive peut se déterminer dès que l'on connaît les positions de tous les points, aux deux époques que l'on considère; et toutes les

fois que le système repassera par une même position, la somme des forces vives redeviendra la même.

Si les forces X, Y, Z sont nulles, le second membre de l'équation (2) est nul et la somme des forces vives est constante. C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des forces vives*.

67. Si tous les points du système sont soumis à l'action seule de la pesanteur, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g dm,$$

en prenant l'axe des z positifs en sens contraire de la pesanteur. L'équation des forces vives deviendra donc, en désignant par z_1 le z du centre de gravité du système, et par M sa masse totale :

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = -gM(z_1 - z_0).$$

La somme des forces vives ne dépendra donc que de la hauteur du centre de gravité du système; et elle redeviendra la même toutes les fois que ce point repassera par le même plan horizontal.

68. Lorsque ce système passe par une position où il serait en équilibre si ses points n'avaient aucune vitesse, on a alors

$$\Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

pour tous les déplacements virtuels. Et comme on peut prendre

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz,$$

il s'ensuit

$$\Sigma(X dx + Y dy + Z dz) = 0,$$

et, par conséquent, le second membre de l'équation (2), ayant sa différentielle nulle, sera, en général, maximum ou

minimum relativement à toutes les valeurs par lesquelles il passe successivement. Ainsi, la somme des forces vives du système obtient ses valeurs maxima ou minima, lorsque le système passe par des positions où il serait en équilibre si ses points y étaient placés sans vitesse.

69. Nous allons démontrer maintenant que l'expression

$$\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$$

est une différentielle exacte quand les forces que l'on y considère sont des actions mutuelles entre les points du système, proportionnelles aux masses de ces points, et dépendant de leurs distances seulement.

En effet, soient x, y, z, x', y', z' les coordonnées de deux points dont les masses sont m, m' et dont la distance est f. Leur action mutuelle aura pour expression $mm'\mathrm{F}$, F désignant une fonction de f seulement, et les trois composantes de l'action exercée par m' sur m seront, en la supposant attractive,

$$mm'\mathrm{F}.\frac{x'-x}{f},\quad mm'\mathrm{F}.\frac{y'-y}{f},\quad mm'\mathrm{F}.\frac{z'-z}{f},$$

et les termes provenant de ces composantes dans

$$\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$$

seront

$$mm'\mathrm{F}\,\frac{(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz}{f}.$$

Les termes provenant des composantes de l'action de m sur m' seront

$$mm'\mathrm{F}\,\frac{(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz'}{f},$$

et, si on les réunit, on a

$$-mm'\text{F}.\frac{(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz')}{f},$$

ce qui se réduit à $-mm'\text{F}df$, en ayant égard à l'équation

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=f^2.$$

On aurait trouvé $+mm'\text{F}.df$ dans le cas d'une action répulsive. Ainsi, tous les termes provenant des actions mutuelles des points seront des différentielles exactes, quand ces actions ne dépendront que de la distance et seront proportionnelles aux masses ; et généralement quand elles seront égales et opposées.

Nous avons démontré précédemment qu'il en était de même pour toutes les forces agissant vers des centres fixes proportionnellement à une fonction de la distance seulement.

Mais le théorème n'aurait plus lieu s'il existait des résistances de milieux ou de frottement ; les forces X, Y, Z dépendraient alors soit des composantes de la vitesse, soit de la pression contre les surfaces ou les lignes qui produisent le frottement, et

$$\Sigma(\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz)$$

ne serait plus une différentielle exacte.

On observera que la différentielle $-mm'\text{F}df$, qui se rapporte aux attractions mutuelles, est négative si df est positif, et positive si df est négatif. Donc les attractions mutuelles donnent un accroissement dans la somme des forces vives quand les points se rapprochent, et une diminution quand ils s'éloignent. De même, si les actions sont répulsives, la somme des forces vives croîtra si les points s'éloignent, et décroîtra s'ils se rapprochent.

70. La somme des forces vives n'est pas altérée par le choc des points du système entre eux, lorsque les corps qui se choquent repassent après la compression par les mêmes états que pendant qu'elle s'opérait, et que la force répulsive qu'ils exercent l'un sur l'autre est la même pour les états semblables; car alors on a des actions mutuelles qui ne dépendent que des distances des points entre lesquels elles ont lieu.

Mais il n'en est plus de même, comme nous allons le voir, quand les corps qui se choquent ne satisfont plus à cette condition, c'est-à-dire quand ils ne sont plus *parfaitement élastiques.*

71. *Perte de forces vives produite par le choc.* — Supposons que les corps qui se choquent soient entièrement dénués d'élasticité, et désignons par a, b, c les composantes de la vitesse du point quelconque m avant le choc, et par A, B, C leurs valeurs après le choc qui a lieu entre des parties quelconques du système.

D'après le principe de d'Alembert, que nous avons démontré applicable aux forces instantanées (n° 42), il devra y avoir équilibre entre les forces de choc, qui sont deux à deux égales et directement opposées, et celles dont les composantes seraient exprimées pour chaque point par

$$-m\Delta\frac{dx}{dt},\quad -m\Delta\frac{dy}{dt},\quad -m\Delta\frac{dz}{dt},$$

ou, d'après les notations précédentes, par

$$m(a-\text{A}),\quad m(b-\text{B}),\quad m(c-\text{C}).$$

Or, en appliquant le principe des vitesses virtuelles, on obtiendra une équation indépendante des forces inconnues que produit le choc, en prenant pour déplacement virtuel celui qui s'opérera réellement après que le choc sera ter-

miné. En effet, les corps cesseront d'agir l'un sur l'autre lorsque leur vitesse sera devenue la même dans le sens de la normale commune; donc alors les moments virtuels des deux forces égales et contraires seront égaux et de signes différents; il est donc inutile d'y avoir égard dans la somme totale, et l'on aura l'équation

$$\Sigma m\,[(a-\mathrm{A})\,dx+(b-\mathrm{B})\,dy+(c-\mathrm{C})\,dz]=0.$$

Or

$$dx=\mathrm{A}\,dt,\quad dy=\mathrm{B}\,dt,\quad dz=\mathrm{C}\,dt;$$

donc

$$\Sigma m\,(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}-\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2)=0.$$

Soient

$$a^2+b^2+c^2=v^2,\quad \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2=\mathrm{V}^2,$$
$$(a-\mathrm{A})^2+(b-\mathrm{B})^2+(c-\mathrm{C})^2=w^2,$$

d'où

$$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}=\frac{v^2+\mathrm{V}^2-w^2}{2};$$

l'équation précédente devient alors

$$\Sigma m\,(v^2-\mathrm{V}^2-w^2)=0,\quad \text{ou}\quad \Sigma mv^2-\Sigma m\mathrm{V}^2=\Sigma mw^2;$$

ce qui prouve qu'il y a une perte de force vive égale à la somme des forces vives relatives aux vitesses perdues. Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Carnot*.

L'auteur l'a étendu au cas où les corps qui se choquent ont un degré quelconque d'élasticité; mais la difficulté de connaître exactement ce degré en rend l'emploi presque impossible dans l'état actuel de la science. Pour qu'on en pût faire usage avec quelque confiance, il faudrait faire de nombreuses expériences, dont on ne s'est pas encore occupé.

La perte de forces vives étant Σmw^2 dans le cas de corps

sans élasticité, si l'on considère le système immédiatement avant et après le choc, les points n'ont pas changé sensiblement de position. En désignant donc par $x, y, z, x', \ldots,$ les coordonnées de ces points, au moment où les corps viennent en contact, l'équation (2) deviendra, en ayant égard à la perte instantanée de forces vives,

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \varphi(x, y, z, x', \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots) \\ \qquad - \frac{1}{2}\Sigma m\omega^2. \end{array} \right.$$

Nous verrons, plus tard, l'usage que l'on fait des équations (2) et (3) dans le calcul de l'effet des machines.

72. L'équation (2) prend une forme remarquable quand on y introduit les vitesses des points par rapport au centre de gravité du système.

En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque de ces points par rapport à des axes fixes; ξ, η, ζ celles du même point par rapport au centre de gravité, on aura

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta;$$

et, par suite,

$$v^2 = \frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dy_1^2}{dt^2} + \frac{dz_1^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Si l'on désigne par v la vitesse du centre de gravité, par V les vitesses dans le mouvement par rapport au centre de gravité, et que l'on observe que l'on a

$$\Sigma m\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \Sigma m\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \Sigma m\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

on obtiendra, en représentant par M la masse totale du

système,

$$(4) \qquad \Sigma m v^2 = \Sigma m V^2 + M u^2.$$

L'équation (2) donne ainsi

$$\frac{1}{2}\Sigma m V^2 - \frac{1}{2}\Sigma m V_0^2 = \frac{M}{2}(u_0^2 - u^2) + \varphi(x, y, z, x', \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots).$$

73. On peut encore faire, au sujet du centre de gravité, une remarque qui est souvent utile. Le mouvement de ce point étant le même que si toute la masse y était réunie et que toutes les forces y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes, on obtiendra des propriétés du mouvement du centre de gravité d'un système, au moyen des propriétés du mouvement d'un point matériel sollicité par des forces données.

En considérant en particulier l'équation relative à la force vive d'un point matériel, et employant les mêmes notations que ci-dessus, on obtiendra

$$(5) \qquad \frac{1}{2} d.M u^2 = dx_1 \Sigma X + dy_1 \Sigma Y + dz_1 \Sigma Z,$$

équation qui peut servir, dans bien des cas, à donner immédiatement l'expression de la vitesse u du centre de gravité. Nous allons en faire usage ici pour démontrer une propriété remarquable du centre de gravité d'un système.

L'équation (1) donne, en y remplaçant $\Sigma m v^2$ par sa valeur, tirée de l'équation (4),

$$\frac{1}{2} d\Sigma m V^2 + \frac{1}{2} d.M u^2 = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz).$$

Or, si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées par rapport à des axes parallèles à ceux des x, y, z et passant par le centre de gravité du système, on aura

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta,$$

et, par suite,

$$dx = dx_1 + d\xi, \quad dy = dy_1 + d\eta, \quad dz = dz_1 + d\zeta,$$

et l'équation précédente devient, en vertu de l'équation (5),

$$\tfrac{1}{2} d.\Sigma m V^2 = \Sigma (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta),$$

c'est-à-dire que l'équation des forces vives a lieu par rapport au centre de gravité, comme si c'était un point fixe.

74. *Équation des forces vives dans le mouvement relatif.* — Considérons maintenant le mouvement du système par rapport à des axes mobiles. Ce mouvement est identique à un certain mouvement absolu que prendrait le système, sous les conditions définies dans le n° 54, et nous pouvons appliquer à ce dernier ce qui vient d'être démontré pour tout mouvement absolu.

Ainsi d'abord, *lorsque les équations de condition ne renfermeront pas explicitement le temps, l'accroissement de la demi-somme des forces vives relatives, dans un temps infiniment petit, est égal à la somme des quantités de travail des forces relatives dans le même intervalle.*

Rappelons-nous maintenant que les forces relatives se composent des forces données et des forces fictives. Ces dernières consistent d'abord dans les forces d'inertie qui seraient développées par chaque point du système, si on le liait aux axes mobiles, et ensuite à des forces perpendiculaires aux vitesses relatives, et dont le travail est, par conséquent, nul.

D'où l'on voit que *l'équation des forces vives a lieu dans le mouvement relatif, pourvu qu'on joigne aux forces données les forces d'inertie de chaque point, supposé lié aux axes mobiles, à l'instant que l'on considère;* ou, d'après les dénominations employées par M. Coriolis, *pourvu*

qu'on joigne aux forces données des forces égales et opposées aux forces d'entraînement pour chacun des points du système.

Toutes les propositions que nous avons établies sur les forces vives dans le mouvement absolu se trouvent donc applicables au mouvement relatif, au moyen de l'introduction de ces forces d'inertie fictives; et il est inutile d'en reproduire les énoncés.

N. B. — Il ne faut pas oublier que dans le mouvement absolu, qui est identique avec le mouvement relatif, les équations de liaison ne sont autre chose que les proposées exprimées au moyen des coordonnées relatives dans lesquelles on substitue à ces dernières les coordonnées absolues prises dans le système des axes fixes que l'on a choisies; que l'état initial, dans ce système, est identique à l'état initial relatif aux axes mobiles; enfin, que les forces, tant données que fictives, que l'on considère dans ce mouvement absolu sont exprimées au moyen des coordonnées qui s'y rapportent, de la même manière que le sont, au moyen des coordonnées relatives, les forces réellement données et les forces fictives considérées dans chaque position du système proposé.

CHAPITRE XVII.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS AU CHOC DES CORPS SPHÉRIQUES.

75. *Choc direct.* — Supposons deux sphères composées de couches homogènes, et dont les centres soient animés de mouvements uniformes suivant une même droite : si ces deux corps viennent à se choquer, leurs vitesses seront modifiées; mais leurs centres continueront à se mouvoir dans un sens ou dans l'autre sur la même droite : nous nous

proposons de trouver les formules qui exprimeront, dans tous les cas, leurs vitesses après le choc, en fonction de leurs vitesses primitives.

Nous considérerons les deux cas extrêmes où les corps sont complétement mous, ou bien parfaitement élastiques; et, pour écarter toutes les difficultés qui peuvent tenir à la forme des corps après le choc, et des mouvements intérieurs qui peuvent y exister, nous les réduirons à deux points matériels; nous supposerons que, quand ils se trouvent à une très-petite distance l'un de l'autre, il s'exerce entre eux une force répulsive qui ne sera fonction que de la distance dans le cas des corps parfaitement élastiques, et qui, au contraire, dans le cas des corps mous, deviendra nulle après un certain degré de rapprochement.

Rapportons la position des deux points à une origine fixe, prise sur la ligne du mouvement. Soient x, x' les abscisses de ces points; m, m' leurs masses, v, v' leurs vitesses avant le choc; V, V' leurs vitesses après le choc. Ces quantités seront considérées comme positives quand le mouvement sera dirigé dans le sens des x positifs, et comme négatives dans le cas contraire; de sorte qu'elles seront toujours représentées, en grandeur et en signe, par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$.

Cela posé, si nous désignons par x_1 l'abscisse du centre de gravité des deux points, nous aurons constamment

$$mx + m'x' = (m + m')\,x_1;$$

et, en différentiant,

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = (m + m')\frac{dx_1}{dt}.$$

Or, d'après le principe de la conservation du mouve-

ment du centre de gravité, $\frac{dx_1}{dt}$ est constant, et a la même valeur avant et après le choc. Le premier membre a donc aussi la même valeur avant et après le choc; ce qui donne cette première relation

$$(1) \qquad mv + m'v' = mV + m'V',$$

quels que soient d'ailleurs les signes des quantités v, v', V, V', et soit que les corps soient mous ou élastiques.

Distinguons maintenant ces deux cas :

1°. Si les corps sont entièrement dénués d'élasticité, l'action mutuelle cessera lorsque leurs vitesses seront devenues égales et de même sens; on aura alors $V' = V$, et l'équation (1) donne

$$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

On voit que les deux corps resteront en repos après le choc, si l'on a

$$mv + m'v' = 0,$$

c'est-à-dire si les quantités de mouvement sont égales, et les vitesses de signes contraires.

On vérifierait facilement que la somme des forces vives après le choc est moindre qu'avant le choc, et que la différence est la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues.

2°. Si les corps sont parfaitement élastiques, la somme des forces vives n'a pas été changée par le choc, et l'on a, par conséquent,

$$(2) \qquad mv^2 + m'v'^2 = mV^2 + m'V'^2.$$

Les équations (1) et (2) déterminent V et V' au moyen de v, v'.

Si on les met sous la forme

$$m(V - v) = m'(v - V'),$$
$$m(V^2 - v^2) = m'(v'^2 - V'^2),$$

on trouve, en les divisant membre à membre,

$$V + v = V' + v',$$

ou

$$V - V' = -(v - v');$$

ce qui montre que les vitesses relatives avant et après le choc sont égales et de sens contraires.

Les équations (1) et (3) donnent

$$(4)\quad \begin{cases} V = \dfrac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'}, \\ V' = \dfrac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'}. \end{cases}$$

Si les masses des deux corps sont égales, ces formules donnent

$$V = v', \quad V' = v,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, les deux corps échangent toujours leurs vitesses.

Si l'un des corps est en repos, par exemple celui dont la masse est m', on trouve

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \quad V' = \frac{2mv}{m + m'};$$

de sorte que le corps en mouvement sera réfléchi s'il a une masse plus petite que l'autre et continuera, au contraire, son mouvement dans le même sens s'il a une masse plus grande. Dans l'un et l'autre cas, sa vitesse relative sera $-v$, comme il résulterait de l'équation (3).

Si l'on avait, en outre, $m = m'$, on trouverait

$$V = 0, \quad V' = v.$$

Le corps immobile ayant pris la vitesse de l'autre serait de même réduit au repos s'il rencontrait un autre corps élastique de même masse et sans vitesse, et ainsi de suite. Ce résultat se vérifie facilement et l'expérience en est faite dans tous les Cours de physique.

76. *Choc oblique.* — Supposons maintenant que les centres des deux sphères, dont les masses sont m, m', ne se meuvent pas suivant une même droite. Soient O, O' les positions de ces centres à l'instant du contact. Nous nous proposons de trouver la grandeur et la direction des vitesses de ces deux points après le choc. Pour cela, concevons qu'à l'instant où le contact des deux sphères a lieu, on décompose chacune de leurs vitesses en deux autres dont l'une soit dirigée suivant la normale commune OO', et l'autre dans le plan tangent commun. Soient N, T ces composantes pour la masse m, et N', T' pour la masse m'.

D'après ce qui a été démontré sur l'effet des forces instantanées, nous pouvons calculer d'abord les vitesses résultant de leur action sur le système qui ne serait animé que des vitesses suivant OO'; puis les composer avec les vitesses dont les directions sont dans le plan tangent.

Nous allons donc considérer d'abord les deux sphères m, m' en mouvement suivant la même droite OO' et se rencontrant avec les vitesses respectives N, N'. Nous nous bornerons encore à traiter deux cas distincts : savoir ceux où les deux corps sont entièrement mous, ou parfaitement élastiques.

1°. Si les deux corps sont mous, les deux forces normales leur donneront une vitesse commune v suivant OO', et sa valeur sera

$$v = \frac{m\text{N} + m'\text{N}'}{m + m'},$$

les quantités N, N', v étant considérées comme positives

dans une des deux directions sur la normale et négatives dans l'autre. Outre cette vitesse commune, les deux sphères ont encore respectivement les vitesses T, T' perpendiculaires à OO'.

2°. Supposons maintenant les deux corps parfaitement élastiques et animés seulement des vitesses suivant la normale. Ils se meuvent alors suivant la ligne des centres avec les vitesses N, N', et auront après le choc des vitesses v, v' dont les expressions, tirées des formules (4), seront

$$(5)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{(m - m')\,\mathrm{N} + 2m'\mathrm{N}'}{m + m'}, \\[2ex] v' = \dfrac{(m' - m)\,\mathrm{N}' + 2m\mathrm{N}}{m + m'}. \end{cases}$$

Ces composantes suivant la normale, jointes aux composantes T, T' dirigées dans le plan tangent, feront connaître la grandeur et la direction des vitesses après le choc.

77. Si $m = m'$, on trouve

$$v = \mathrm{N}', \quad v' = \mathrm{N};$$

et les vitesses primitives suivant la normale se sont changées l'une dans l'autre, comme nous l'avions déjà trouvé en étudiant le choc direct.

78. Si la masse m' est primitivement en repos, $\mathrm{N}' = 0$, et, par suite,

$$v = \frac{m - m'}{m + m'}\cdot\mathrm{N}, \quad v' = \frac{2m}{m + m'}\cdot\mathrm{N}.$$

D'où l'on voit que si la masse m' croît indéfiniment, v' tend vers zéro et v vers $-\mathrm{N}$. En composant cette vitesse égale et contraire à N avec la même vitesse T suivant le plan tangent, on a une vitesse égale à celle du point m

avant le choc, située dans le plan de la normale et de la vitesse incidente, et dont la direction fait avec la normale le même angle que la direction de la vitesse primitive; ce qui s'exprime en disant que : *Lorsqu'une sphère parfaitement élastique rencontre un obstacle inébranlable et élastique, elle se réfléchit de telle sorte que sa vitesse reste la même et que les directions du mouvement de son centre avant et après le choc soient dans un même plan passant par la normale au point d'incidence, et fassent avec cette ligne des angles égaux.*

79. On peut démontrer directement cette loi de réflexion des corps élastiques. En effet, lorsque la sphère m vient rencontrer la surface fixe, elle se trouve soumise à l'action d'une force normale F variable, fonction de la distance f du centre à la surface fixe. L'intégrale $\int F\,df$ prise dans toute la durée du choc est donc nulle, et la force vive n'a pas changé. La vitesse est donc la même avant et après le choc; et comme les forces normales à la surface fixe qui ont agi sur la sphère n'ont pas changé sa vitesse suivant le plan tangent, il s'ensuit qu'après le choc la vitesse de la sphère et l'une de ses composantes sont les mêmes : la seconde composante est donc aussi la même; d'où il suit que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, et l'on retombe sur la loi déjà démontrée.

80. Enfin supposons que la surface réfléchissante, au lieu d'être fixe, ait un mouvement qui ne puisse être influencé par la sphère incidente; il suffira, dans les formules (5), de supposer $m' = \infty$, et l'on trouvera

$$v = -N + 2N' = -(N - 2N'), \quad v' = N'.$$

Ainsi la composante normale de la vitesse après la réflexion n'a plus la même valeur qu'avant; elle est diminuée du double de la vitesse normale de la surface réfléchissante.

De sorte que la sphère se mouvrait constamment dans le plan tangent à cette surface au point d'incidence si l'on avait $N = 2N'$.

CHAPITRE XVIII.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

81. Considérons un corps solide dont la forme et la densité en chacun de ses points sont données, et qui est lié invariablement avec un axe fixe, autour duquel il peut tourner librement. Tous ses points, ou seulement un nombre fini d'entre eux, sont sollicités par des forces données; et il s'agit de déterminer le mouvement de ce corps, soit que l'on donne les vitesses initiales de ses points, soit que l'on connaisse seulement les forces instantanées qui les ont produites.

Si les forces données ne sont pas comprises dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, on peut toujours les décomposer en deux, dont l'une soit parallèle à cet axe, et l'autre dans un plan perpendiculaire; la première sera détruite par la résistance de l'axe, et l'on peut en faire abstraction dans la recherche du mouvement. Nous supposerons donc que toutes les forces données agissent dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe.

D'après le principe de d'Alembert, on doit exprimer qu'il y a équilibre entre les forces données et le système des forces égales et directement opposées à celles qui donneraient à chaque point, supposé libre, le mouvement qu'il a réellement. Ces dernières seraient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} dm, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} dm, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} dm,$$

pour l'élément dont la masse est dm et les coordonnées x,

y, z; mais il vaudra mieux, dans le cas actuel, considérer les deux composantes, tangente et normale : la première est celle qui donne l'accroissement de vitesse, la seconde est la force centripète et se trouve détruite par la résistance de l'axe, puisque chaque point décrit un arc de cercle dont le centre est sur cet axe. On peut donc se borner à considérer la première de ces forces, qui est tangente à l'arc décrit, et représentée par $\frac{dv}{dt}\,dm$, en désignant par v la vitesse et par dm la masse de ce point. Si l'on désigne par r la distance de ce point à l'axe, et par θ l'angle formé par deux plans passant par l'axe, dont l'un soit fixe, et l'autre lié au corps, et mobile avec lui, on aura

$$v = r\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

La vitesse sera alors considérée comme positive lorsque l'angle θ croîtra, et la force sera positive quand elle tendra à faire croître cet angle. Or la condition d'équilibre d'un corps solide autour d'un axe fixe consiste en ce que la somme algébrique des moments des forces par rapport à cet axe soit nulle, en considérant comme positifs les moments des couples qui tendraient, par exemple, à augmenter l'angle θ, et comme négatifs ceux qui tendraient à le diminuer. Si donc on désigne par P l'une quelconque des forces données, et par p sa distance à l'axe, l'équilibre entre les forces P et les forces $-r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ conduira à l'équation suivante :

$$\Sigma \mathrm{P}p - \Sigma r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm = 0,$$

les sommes se rapportant à tous les points du corps.

Dans le dernier terme de cette équation, le facteur

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ peut sortir en dehors du signe Σ, et ce terme devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\Sigma r^2 dm.$$

L'équation précédente deviendra donc

$$(1)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Sigma P p}{\Sigma r^2 dm}.$$

En général, les moments des forces données varieront avec la position du corps; si ces forces ne dépendent pas du temps, leurs moments seront des fonctions connues de θ, et, en intégrant l'équation (1), on aura θ en fonction de t et de deux constantes arbitraires. Ces constantes seront déterminées, et, par suite aussi, le mouvement de tous les points du corps, si l'on connaît les valeurs de θ et $\frac{d\theta}{dt}$ relatives à $t = 0$, c'est-à-dire la position et la vitesse angulaire du corps au commencement du mouvement.

Pour effectuer l'intégration de l'équation (1), représentons son second membre par $\varphi(\theta)$, elle devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \varphi(\theta);$$

multipliant les deux membres par $2d\theta$, et intégrant à partir de la valeur initiale θ_0 de θ, on aura

$$(2)\qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)\,d\theta + \omega^2,$$

ω étant la valeur initiale de la vitesse angulaire; on tirera de là

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)\,d\theta + \omega^2}}.$$

Si l'on peut effectuer cette quadrature, on aura t en fonction de θ; et la constante qui s'introduira sera déterminée en exprimant qu'on a à la fois

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0.$$

Si les forces données sont telles, que l'équation des forces vives ait lieu, elle conduira immédiatement à l'équation (2), parce que la vitesse d'un point situé à la distance r de l'axe étant $r\frac{d\theta}{dt}$, la somme Σmv^2 aura pour expression

$$\Sigma mr^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta^2}{dt^2}\Sigma mr^2.$$

Exprimant ensuite le second membre de l'équation des forces vives en fonction de la seule variable θ, ce qui sera toujours possible, on connaîtra $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ en fonction de θ, et l'on trouvera ainsi l'équation (2).

82. Considérons en particulier le cas d'un corps pesant qui peut se mouvoir autour d'un axe horizontal, que nous prendrons pour axe des y, l'axe des z étant en sens contraire de la pesanteur. Nous considérerons l'angle θ comme formé par le plan qui passe par l'axe fixe et le centre de gravité du corps, avec le plan vertical YZ; et nous supposerons que cet angle croisse en allant de l'axe des z positifs vers l'axe des x positifs, c'est-à-dire dans le sens que nous sommes convenus de choisir pour celui du mouvement direct. Le moment relatif à l'élément dm sera $gxdm$, car il tend à augmenter l'angle θ quand x est positif, et à le diminuer quand x est négatif; l'équation (1) deviendra donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g\Sigma xdm}{\Sigma r^2 dm},$$

ou, en désignant par x_1 l'abscisse du centre de gravité du

corps,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mgx_1}{\Sigma r^2 dm}.$$

Or on a

$$x_1 = l \sin\theta,$$

et, par suite,

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mgl}{\Sigma r^2 dm} \sin\theta.$$

Cette équation est de même forme que celle qui déterminerait le mouvement d'un point matériel autour de l'origine, dans le plan XZ. Si l'on désigne par R la distance de ce point mobile à l'origine, ou la longueur de ce pendule simple, on obtient pour l'équation de son mouvement,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{R} \sin\theta.$$

Cette équation se déduirait de la précédente, en supposant toute la masse réunie en un même point situé à une distance R de l'axe. Elle coïncidera avec la précédente si l'on pose

$$R = \frac{\Sigma mr^2}{Ml};$$

si donc on suppose que pour $t = 0$ les valeurs de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$ soient les mêmes de part et d'autre, c'est-à-dire si le plan qui passe par le centre de gravité du corps et l'axe fixe fait d'abord le même angle avec la verticale, et a la même vitesse initiale que ce pendule simple, leur mouvement sera constamment le même. Le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un axe fixe étant ainsi ramené à celui du pendule, nous nous bornerons à renvoyer à la discussion que nous avons faite de ce dernier.

83. Faisons à ce cas particulier l'application que nous

venons d'indiquer généralement du principe des forces vives. On a alors

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -gdm,$$

pour les composantes de la force appliquée à un élément quelconque dm de la masse ; l'équation des forces vives devient donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Sigma mr^2 = -2\Sigma \int gdmdz = -2g\Sigma zdm + C,$$

C désignant une constante arbitraire. Mais, en représentant par z_1 le z du centre de gravité du corps, on a

$$\Sigma zdm = Mz_1 = Ml\cos\theta.$$

Si l'on détermine la constante par la condition que les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$ soient θ_0 et ω, l'équation précédente deviendra

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2gMl}{\Sigma r^2 dm}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \omega^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'intégrale première de l'équation (3). Le calcul s'achèverait comme dans la théorie du pendule.

Si l'axe fixe était incliné à l'horizon, une simple décomposition de la pesanteur ramènerait au cas que nous venons de considérer, où l'axe est perpendiculaire à la direction des forces.

84. Un corps solide qui oscille autour d'un axe horizontal se nomme un *pendule composé ;* ce que l'on appelle sa *longueur,* c'est celle du pendule simple dont le mouvement est le même. Ainsi la longueur du pendule composé que nous avons considéré est $\frac{\Sigma r^2 dm}{Ml}$. Elle ne serait pas

changée si l'on donnait au corps une autre position quelconque, pour laquelle l et $\Sigma r^2\, dm$ resteraient les mêmes.

Mouvement d'un corps autour d'un axe, produit par une force instantanée.

85. Nous avons déterminé le mouvement d'un corps autour d'un axe, en supposant que sa position initiale soit connue, ainsi que sa vitesse angulaire initiale. Mais si, au lieu de cette vitesse, on donne seulement la force instantanée qui l'a produite, il faudra commencer par déterminer quelle vitesse doit prendre le corps, soumis pendant un temps extrêmement petit à l'action d'une force qui aurait produit sur un point matériel libre une quantité de mouvement connue.

Si l'on décompose cette force en deux autres, dont l'une soit parallèle à l'axe, et l'autre dans un plan perpendiculaire, cette dernière produira seule le mouvement. Représentons sa valeur par P, et par p sa distance à l'axe; le principe de d'Alembert conduira à l'équation

$$\omega \Sigma r^2 dm = \mathrm{P}p,$$

ω étant la vitesse angulaire; d'où, en employant les mêmes dénominations que précédemment,

$$\omega = \frac{\mathrm{P}p}{\Sigma r^2 dm}.$$

La vitesse angulaire produite par l'impulsion étant connue, le mouvement se déterminera comme précédemment; et si aucune force ne reste appliquée au corps, l'équation (1) donnera $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, et la vitesse angulaire sera constante.

86. Supposons que l'impulsion ait été produite par le choc d'un point ayant une masse μ, animée d'une vitesse v dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe, suivant une droite distante de l'axe d'une quantité f, et admettons que cette masse reste unie au corps au point où elle le rencontre, et dont nous désignerons par h la distance à l'axe.

Si l'on décompose la vitesse v suivant la normale et la tangente au cercle que décrira autour de l'axe le point où a lieu le choc, la première sera détruite, et l'autre aura pour valeur $\frac{vf}{h}$. Représentons par ω la vitesse angulaire du système après le choc; la masse μ aura perdu la vitesse $\frac{vf}{h} - h\omega$, et la quantité de mouvement que la réaction du corps lui aura fait perdre sera $\mu\left(\frac{vf}{h} - h\omega\right)$: telle sera donc la mesure de la force instantanée produite sur la masse μ: et, comme l'action et la réaction sont égales, ce sera aussi la mesure de la force instantanée qui a agi sur le corps donné. On rentre donc dans le cas précédent et l'on aura de même

$$\mu h\left(\frac{vf}{h} - h\omega\right) = \omega\,\Sigma r^2 dm; \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\mu v f}{\mu h^2 + \Sigma r^2 dm}.$$

Le dénominateur est le moment d'inertie du système composé du corps donné et de la masse qui s'est unie à lui. Si donc on entend que la somme Σ s'étend à leur ensemble, on écrira simplement

$$\omega = \frac{\mu f v}{\Sigma r^2 dm}.$$

Si, au lieu d'un seul corps, on en supposait un nombre quelconque dont les masses fussent μ, μ', μ'', etc., les vitesses v, v', v'', etc., et les distances des directions de ces vitesses à l'axe f, f', f'', etc., et que tous ces corps vinssent

choquer le premier au même instant, en se réunissant à lui, on aurait

$$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \text{etc.}}{\Sigma r^2 dm},$$

la somme $\Sigma r^2 dm$ se rapportant à tous ces corps réunis.

CHAPITRE XIX.

DES MOMENTS D'INERTIE.

87. La détermination du mouvement d'un corps solide exige, comme nous venons de le voir, la considération de certaines intégrales définies prises dans toute l'étendue de ce corps, et dont il est nécessaire d'étudier avec quelque détail les propriétés.

Mais d'abord il faut remarquer que les corps étant composés de molécules séparées les unes des autres par des intervalles extrêmement petits, il n'y a pas rigoureusement continuité dans la matière qui les forme. Néanmoins, tant qu'on ne considère que l'action des forces extérieures, il n'y a aucun inconvénient à concevoir la matière répartie dans la totalité du volume occupé par un corps, de telle sorte que, dans toute partie très-petite de ce volume, et pouvant renfermer toutefois un grand nombre de molécules, il y ait la même quantité de masse qu'auparavant. Cette supposition donnera de la facilité au calcul, et les forces extérieures ne variant pas sensiblement d'une molécule à la plus voisine, il n'en résultera aucune différence appréciable dans les actions exercées sur les différentes parties du corps.

88. On appelle *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite, la somme des produits des masses de tous ses éléments par le carré de leur distance à cette droite.

Si on la prend pour axe des z, le moment d'inertie a pour expression

$$\Sigma(x^2+y^2)dm,$$

dm étant la masse de l'élément dont les coordonnées sont x, y, z; et l'intégrale s'étendant à toute la masse. De même, les moments d'inertie par rapport aux axes des y et des x ont pour expressions

$$\Sigma(x^2+z^2)\,dm,\quad \Sigma(y^2+z^2)\,dm.$$

89. Connaissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite, il est facile de l'avoir par rapport à toute autre droite parallèle.

En effet, prenons la première pour axe des z, et faisons passer le plan des z, x par la seconde.

Soient a la distance des deux droites, et M la masse du corps. Désignons par Mk^2 son moment d'inertie par rapport à l'axe des z. Celui qui se rapporte à la parallèle aura pour expression

$$\Sigma[(x-a)^2+y^2]dm = \Sigma(x^2+y^2)\,dm - 2a\Sigma\,xdm + Ma^2,$$

ou, en désignant par x_1 l'abscisse du centre de gravité,

$$M(k^2+a^2) - 2aMx_1.$$

90. Si le centre de gravité se trouvait sur l'axe des z, on aurait $x_1 = 0$, et l'expression précédente se réduirait à

$$M\,(k^2+a^2);$$

on voit qu'elle ne dépend pas de la position absolue de la seconde droite, mais seulement de la distance à la première; de sorte que le moment d'inertie d'un corps est le même par rapport à toutes les génératrices d'un cylindre droit quelconque à base circulaire, dont l'axe passe par le centre de gravité de ce corps. Il s'ensuit que si l'on con-

sidère les moments d'inertie par rapport à deux parallèles quelconques, leur différence est égale à la masse du corps, multipliée par la différence des carrés de leurs distances respectives au centre de gravité de ce corps.

On en conclut encore que de toutes les droites parallèles à une direction donnée, celle par rapport à laquelle le moment d'inertie d'un corps est le plus petit, est celle qui passe par le centre de gravité.

91. Cherchons maintenant l'expression du moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque AS menée par l'origine et faisant les angles α, β, γ avec les axes de coordonnées. On en déduira facilement le moment d'inertie par rapport à une parallèle à cette droite, c'est-à-dire par rapport à une droite quelconque de l'espace.

Soient x, y, z (*fig.* 7) les coordonnées du point M du corps, et dm la masse de l'élément dont ce point fait partie. Abaissant MP perpendiculaire sur AS, on aura

$$\overline{\text{MP}}^2 = \overline{\text{AM}}^2 - \overline{\text{AP}}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

ou

$$\overline{\text{MP}}^2 = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Si l'on désigne par μ le moment d'inertie du corps par rapport à AS, ou $\Sigma\,\overline{\text{MP}}^2 dm$, et qu'on pose

$$\Sigma x^2 dm = a, \quad \Sigma y^2 dm = b, \quad \Sigma z^2 dm = c,$$
$$\Sigma yz dm = d, \quad \Sigma xz dm = e, \quad \Sigma xy dm = f,$$

on trouvera

$$\mu = a\sin^2\alpha + b\sin^2\beta + c\sin^2\gamma - 2d\cos\beta\cos\gamma - 2e\cos\alpha\cos\gamma - 2f\cos\alpha\cos\beta.$$

a, b, c, d, e, f seront des constantes déterminées par la nature du système donné, et sa position par rapport aux axes. Si maintenant on porte sur AS une longueur $AN = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, et qu'on fasse la même construction pour toutes les directions que peut prendre AS autour du point A, le lieu des points N sera une surface entièrement fermée, puisque AN a toujours une valeur réelle et finie. Pour en avoir l'équation, on désignera par x, y, z les coordonnées de N, et l'on aura

$$\cos\alpha = x\sqrt{\mu}, \quad \cos 6 = y\sqrt{\mu}, \quad \cos\gamma = z\sqrt{\mu},$$

$$\frac{1}{\mu} = x^2 + y^2 + z^2.$$

L'équation précédente qui donne la valeur de μ devient, en éliminant α, 6, γ, μ au moyen de ces dernières,

$$(1)\ (b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2 - 2dyz - 2exz - 2fxy = 1.$$

Le lieu est donc une surface du second degré dont l'origine est le centre, et c'est un ellipsoïde, puisque aucun rayon ne peut être infini. M. Poinsot le désigne sous le nom d'*ellipsoïde central.*

La forme et la position de cet ellipsoïde ne dépendent en rien du choix des axes de coordonnées; mais son équation serait plus simple si l'on avait pris ces derniers dans la direction des axes de l'ellipsoïde, qui forment un système unique, lorsque les grandeurs de ces axes sont inégales, comme cela a lieu en général.

Admettons donc que l'on ait choisi ce système de coordonnées, les constantes désignées par a, b, c, d, e, f prendront des valeurs dépendantes de ce choix, et telles que les rectangles des variables ne se trouvent pas dans

l'équation de l'ellipsoïde, et l'on aura par conséquent

$$d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0,$$

ou

$$\Sigma yzdm = 0, \quad \Sigma xzdm = 0, \quad \Sigma xydm = 0.$$

Donc il existe toujours un système d'axes tels que ces trois intégrales soient nulles, quelle que soit la forme du corps, et lors même que l'on supposerait un nombre quelconque de corps séparés les uns des autres. Ce système, étant celui des axes de l'ellipsoïde, sera unique si ces axes sont inégaux. Si deux d'entre eux sont égaux, l'axe perpendiculaire sera invariable, mais les deux autres seront deux droites rectangulaires quelconques situées dans le plan des deux axes égaux. Enfin, si les trois axes sont égaux, tout système d'axes rectangulaires passant par le même point jouit de la même propriété. On a donné à ces directions particulières le nom d'*axes principaux d'inertie* du corps.

Si nous désignons par A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport à ses axes principaux, ou, en d'autres termes, ses *moments d'inertie principaux,* nous aurons

$$b + c = A, \quad a + c = B, \quad a + b = C,$$

et l'équation (1) de l'ellipsoïde central devient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

92. Le moment d'inertie μ par rapport à un axe quelconque passant par l'origine, et faisant les angles α, 6, γ avec les axes principaux, s'obtiendra en observant que le rayon correspondant de l'ellipsoïde étant égal à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, on aura pour expression des coordonnées x, y, z de son extrémité :

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mu}}, \quad y = \frac{\cos 6}{\sqrt{\mu}}, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\mu}},$$

et, en substituant dans l'équation de l'ellipsoïde, on obtient

$$\mu = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 6 + C \cos^2 \gamma.$$

Le second membre est évidemment plus grand que la plus petite des trois quantités A, B, C et plus petit que la plus grande. On en conclut que le plus petit et le plus grand des moments principaux sont aussi le plus petit et le plus grand des moments relatifs à toutes les droites passant par le même point; comme d'ailleurs on le déduit immédiatement de la comparaison géométrique des rayons de l'ellipsoïde avec ses axes.

Si l'on a $A = B$, il en résulte

$$\mu = A (\cos^2 \alpha + \cos^2 6) + C \cos^2 \gamma,$$

ou

$$\mu = A + (C - A) \cos^2 \gamma;$$

d'où l'on voit que les moments d'inertie seront les mêmes pour toutes les droites passant toujours par le même point, et faisant des angles égaux avec l'axe inégal. C'est ce qu'on aperçoit immédiatement au moyen de l'ellipsoïde central qui est alors de révolution autour de l'axe des z.

93. Si l'on avait seulement

$$\Sigma xzdm = 0, \quad \Sigma yzdm = 0,$$

l'équation de l'ellipsoïde renfermerait le rectangle xy, et aucun des deux autres. L'axe des z serait donc un de ses axes principaux, et, par suite, un des axes principaux d'inertie relatifs à l'origine des coordonnées.

94. Cherchons maintenant s'il existe des points tels, que les trois moments principaux d'inertie qui s'y rapportent, et, par suite, tous les autres, soient égaux. L'ellipsoïde central relatif à ce point se réduira à une sphère, et toutes les droites passant par ce point seront des axes principaux.

Supposons, pour plus de simplicité, que l'on ait pris pour axes de coordonnées les axes principaux relatifs au centre de gravité du corps, et désignons par x', y', z' les coordonnées du point cherché. Si par ce point on conçoit des parallèles aux trois axes des x, y, z, ces droites devront être des axes principaux relativement à ce point, et, par conséquent, on devra avoir

$$\Sigma (y - y')(z - z')\, dm = 0,$$
$$\Sigma (z - z')(x - x')\, dm = 0,$$
$$\Sigma (x - x')(y - y')\, dm = 0;$$

or on a, par hypothèse,

$$\Sigma yzdm = 0, \quad \Sigma xzdm = 0, \quad \Sigma xydm = 0,$$
$$\Sigma xdm = 0, \quad \Sigma ydm = 0, \quad \Sigma zdm = 0.$$

Les équations précédentes deviennent donc, en désignant par M la masse totale du système,

$$My'z' = 0, \quad Mx'z' = 0, \quad Mx'y' = 0;$$

ce qui exige que deux des trois quantités x', y', z' soient nulles. Soient $x' = 0$, $y' = 0$; les moments relatifs aux nouveaux axes seront

$$A + Mz'^2, \quad B + Mz'^2, \quad C.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que ces trois valeurs sont égales; ce qui exige que l'on ait

$$A = B, \quad A + Mz'^2 = C.$$

Ainsi, deux des moments principaux relatifs au centre de gravité doivent être égaux, et les points cherchés, s'il y en a, seront nécessairement situés sur l'axe correspondant au troisième moment. Mais, pour que z' soit réel, il faudra que l'on ait $C > A$; ainsi, on a cette dernière

condition, que ce troisième moment soit le plus grand. Quand toutes ces conditions seront remplies, on aura deux points qui satisferont à la question; ils seront situés sur l'axe du plus grand moment, de part et d'autre du centre de gravité, et à une distance de ce point égale à $\sqrt{\frac{C - A}{M}}$.

95. Les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité d'un corps jouissent de la propriété remarquable d'être des axes principaux relativement à un quelconque de leurs points, et d'avoir pour conjugués des axes parallèles à ceux qui se rapportent au centre de gravité.

En effet, considérons l'un quelconque des trois, par exemple l'axe des z, et transportons l'origine en un quelconque de ses points, dont le z soit h; il suffira de poser

$$z = z' + h.$$

Or on a, par hypothèse,

$$\Sigma yz\,dm = 0, \quad \Sigma xz\,dm = 0, \quad \Sigma xy\,dm = 0;$$

d'ailleurs

$$\Sigma yz\,dm = \Sigma yz'\,dm + h\Sigma y\,dm = \Sigma yz'\,dm;$$

donc

$$\Sigma yz'\,dm = 0,$$

et, de même,

$$\Sigma xz'\,dm = 0.$$

Donc les parallèles aux trois axes principaux relatifs au centre de gravité, menées par un point quelconque de l'un d'eux, sont des axes principaux relativement à ce point.

96. *Moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle.* — Si, par le centre de ce parallélipipède, supposé homogène, on mène trois parallèles à ses arêtes, on aura les axes principaux relatifs au centre de gravité. Désignons par a,

b, c les longueurs des arêtes, et par M la masse du parallélipipède; les moments d'inertie par rapport aux axes qui leur sont respectivement parallèles seront

$$M\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right),\quad M\left(\frac{a^2+c^2}{12}\right),\quad M\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right).$$

Le moment d'inertie par rapport à une droite faisant les angles α, 6, γ avec les arêtes a, b, c et située à une distance d du centre du parallélipipède, serait donc

$$\frac{M}{12}\left[(b^2+c^2)\cos^2\alpha+(a^2+c^2)\cos^2 6+(a^2+b^2)\cos^2\gamma\right]+Md^2.$$

Si l'on considère successivement les trois arêtes du parallélipipède, les moments d'inertie seront

$$M\left(\frac{b^2+c^2}{3}\right),\quad M\left(\frac{a^2+c^2}{3}\right),\quad M\left(\frac{a^2+b^2}{3}\right).$$

97. *Moment d'inertie d'un ellipsoïde.* — Il suffit de connaître ceux qui se rapportent aux trois axes principaux d'inertie passant par le centre de gravité, et qui seront les axes mêmes de l'ellipsoïde que nous supposons homogène. Soit son équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et cherchons le moment d'inertie par rapport à l'axe des z. La partie du volume qui se projette suivant le rectangle $dx\,dy$ est

$$2c\,dx\,dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

et, par conséquent, si l'on désigne par D la densité de la substance, le moment d'inertie du corps sera

$$2cD\int\int(x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

que l'on peut décomposer ainsi :

$$2cD\int\int x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$
$$+\,2cD\int\int y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Considérons d'abord la première partie, et commençons par intégrer, par rapport à y, entre les limites

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad\text{et}\quad+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

L'intégrale

$$\int dy\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2},$$

prise entre ces limites, n'est autre chose que l'aire du demi-cercle qui a pour rayon

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

sa valeur est donc

$$\frac{\pi b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

et il faut intégrer maintenant, par rapport à x, l'expression

$$\pi bcDx^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

depuis $x=-a$ jusqu'à $x=+a$, ce qui donne

$$\frac{4}{15}\pi bca^3D,\quad\text{ou}\quad\frac{Ma^2}{5},$$

en désignant par M la masse de l'ellipsoïde.

La seconde expression qu'il faut maintenant intégrer, ne

différant de la première que par le changement réciproque de x en y et de a en b, conduira à $\frac{Mb^2}{5}$; de sorte que le moment d'inertie par rapport à l'axe des z sera

$$M\left(\frac{a^2+b^2}{5}\right),$$

et l'on trouverait, pour les deux autres axes,

$$M\left(\frac{a^2+c^2}{5}\right),\quad M\left(\frac{b^2+c^2}{5}\right).$$

Dans le cas où $a=b=c$, on a le moment d'inertie d'une sphère par rapport à l'un quelconque de ses diamètres; son expression est

$$\frac{2Ma^2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{8\pi D a^5}{15}.$$

98. Si l'on fait croître le rayon a de cette sphère de la quantité infiniment petite da, son moment d'inertie croîtra de $\frac{8}{3}\pi D a^4 da$, qui exprimera le moment d'inertie d'une couche sphérique de rayon a ayant pour épaisseur da, et pour densité D.

Si maintenant on suppose que D soit une fonction donnée de a, et qu'on intègre cette expression entre deux valeurs R, R', on aura le moment d'inertie d'une sphère creuse non homogène, dont la densité ne dépendra que de la distance au centre.

99. *Moment d'inertie d'un solide de révolution.* — Considérons encore le solide homogène engendré par une aire plane tournant autour d'une droite située dans son plan, et que nous prendrons pour axe des y. Soient $F(y)$, $\varphi(y)$ les expressions des abscisses des deux courbes qui terminent l'aire, et D la densité de la substance : le moment d'inertie de la tranche comprise entre deux plans perpendiculaires à

l'axe, et correspondants aux ordonnées y et $y+dy$, sera $2\pi D dy \int x^3 dx$, en prenant cette intégrale entre les limites $\varphi(y)$, $F(y)$; ce qui donne

$$\frac{\pi D dy}{2}[F(y)^4 - \varphi(y)^4].$$

Il ne restera plus qu'à intégrer cette expression par rapport à y entre les limites de l'aire génératrice.

Si, par exemple, on a

$$\varphi(y) = 0, \quad F(y)^2 = a^2 - y^2,$$

le solide devient une sphère; et le moment d'inertie aura pour expression

$$\frac{\pi D}{2}\int_{-a}^{+a}(a^2-y^2)^2\,dy, \quad \text{ou} \quad \frac{8\pi D a^5}{15},$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

CHAPITRE XX.

DIVERSES PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE FIXE.

100. *Centre d'oscillation.* — On nomme *centre d'oscillation* d'un pendule composé, tout point faisant partie de ce corps ou lié invariablement à ce corps, dont le mouvement est le même que s'il était isolé et obligé de se mouvoir autour du même axe par l'action de la pesanteur. D'après cela, tous les points de la droite menée parallèlement à l'axe, à une distance égale à la longueur du pendule, c'est-à-dire à $\frac{\Sigma mr^2}{Ml}$ (n° 82), et située dans le plan qui passe par l'axe et le centre de gravité du corps, seront des centres d'oscillation.

Quelques auteurs appellent plus particulièrement *centre d'oscillation* celui de ses points qui est situé sur la verticale qui passe par le centre de gravité.

Si nous désignons par Mk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à une parallèle à l'axe menée par le centre de gravité, nous savons qu'on aura

$$\Sigma mr^2 = M(k^2 + l^2).$$

La longueur du pendule sera donc $l + \frac{k^2}{l}$; et les centres d'oscillation seront plus éloignés de l'axe de suspension que le centre de gravité d'une quantité égale à $\frac{k^2}{l}$.

Les distances du centre de gravité à l'axe et à la ligne des centres d'oscillation, donnant pour produit k^2, il s'ensuit que si l'on prenait cette dernière pour axe fixe, la première deviendrait la ligne des centres d'oscillation. La longueur du pendule serait donc la même qu'auparavant, et son mouvement serait identique. Il en serait encore de même si l'on prenait pour axe de suspension toute autre droite parallèle située à la même distance du centre de gravité, puisque l et k^2 ne changeraient pas.

En général, le mouvement sera le même autour de tous les axes qui donneront la même longueur au pendule. Si l'on désigne par l la distance d'un axe quelconque au centre de gravité, par α, 6, γ les angles que sa direction fait avec les axes principaux relatifs à ce point, et par A, B, C les moments d'inertie par rapport à ces axes, on aura

$$Mk^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma,$$

et la longueur $l + \frac{k^2}{l}$ du pendule sera

$$l + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma}{Ml},$$

Or, cette longueur peut rester la même pour une infinité de droites différentes, puisque α, β, γ, l sont indéterminés.

101. Si l'on cherche les valeurs que doivent avoir ces indéterminées, pour que l'expression précédente soit minimum, on saura autour de quel axe il faut que le mouvement ait lieu pour que l'oscillation se fasse dans le moindre temps possible.

Or, parmi tous les axes pour lesquels k^2 serait constant, celui qui donne le minimum pour la longueur $l + \frac{k^2}{l}$ correspond à $l = k$; et la longueur du pendule est alors égale à $2k$. Elle sera donc la plus petite possible lorsque k aura sa plus petite valeur. Ainsi, l'oscillation sera la plus courte lorsque l'axe de suspension sera parallèle à l'axe du plus petit moment d'inertie relatif au centre de gravité; et sa distance k à cet axe est égale à la racine carrée du rapport de ce moment d'inertie à la masse du corps.

102. *Percussion contre l'axe.* — La force instantanée qui met un corps en mouvement autour d'un axe fixe, produit sur cet axe une sorte de choc ou de percussion qu'il est nécessaire de connaître, et qui provient des forces qui se font équilibre au moyen de sa résistance. Prenons cet axe pour axe des z; et pour plan de x et y, le plan perpendiculaire mené par le point d'application de la force. Décomposons cette force en deux autres : l'une, Z, parallèle à l'axe fixe; l'autre, P, située dans le plan XY, et ayant pour composantes X, Y.

L'équilibre devra avoir lieu entre les forces $-X$, $-Y$, $-Z$, et celles qui seraient mesurées par les quantités de mouvement $dm\,\frac{dx}{dt}$, $dm\,\frac{dy}{dt}$, $dm\,\frac{dz}{dt}$ relativement à tous les éléments du corps; et il faut observer que l'on a $\frac{dz}{dt} = 0$, puisque le mouvement a lieu autour de l'axe des z.

Soient x, y, z les coordonnées de l'élément dm, r sa distance à l'axe, θ l'angle formé avec l'axe des x par la projection de la perpendiculaire abaissée de cet élément sur l'axe, et ω la vitesse angulaire produite. On aura

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega;$$

en différentiant par rapport à t, on aura

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x,$$

et les composantes de la force appliquée à l'élément dm parallèlement à l'axe des x et à l'axe des y, seront respectivement $-\omega y dm$ et $\omega x dm$.

Si maintenant on décompose le système de ces forces, jointes à $-$X, $-$Y, $-$Z, en trois forces dirigées suivant les axes des x, y, z, et en trois couples ayant leurs axes dans ces mêmes directions, on trouvera, pour les forces, les expressions

$$-X - \omega M y_1, \quad -Y + \omega M x_1, \quad -Z,$$

x_1, y_1 désignant les coordonnées du centre de gravité du corps; les trois couples auront respectivement pour expressions

$$bZ + \omega\Sigma xzdm, \quad -aZ + \omega\Sigma yzdm, \quad aY - bX - \omega\Sigma r^2dm,$$

a et b étant les coordonnées du point d'application de la force.

Or, le dernier couple est nul de lui-même, d'après la condition d'équilibre autour de l'axe; et les efforts exercés sur l'axe ne proviennent que des deux autres couples et des forces dirigées suivant les trois axes.

103. *Centre de percussion.* — Cherchons maintenant les conditions pour que l'axe fixe ne reçoive aucune percussion. Il faut pour cela qu'il y ait équilibre, indépendamment de cet axe, et que, par conséquent, les forces dirigées suivant les axes, et les couples situés dans les plans coordonnés, soient nuls séparément ; ce qui donne, en supposant, pour plus de simplicité, qu'on fasse passer le plan des x et z par le centre de gravité du corps, et que par conséquent y_1 soit nul,

$$Z = 0, \quad X = 0, \quad Y = \omega M x_1,$$
$$\Sigma xzdm = 0, \quad \Sigma yzdm = 0, \quad -aY + \omega \Sigma r^2 dm = 0.$$

La dernière équation fait connaître la vitesse angulaire ; les deux précédentes indiquent que l'axe des z est un des axes principaux qui se coupent à l'origine des coordonnées. La première apprend que la force doit être située dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe, et la seconde prouve qu'elle est perpendiculaire au plan passant par l'axe et par le centre de gravité du corps.

Pour connaître la distance a de la force instantanée à l'axe fixe en fonction des données, il faudra, dans la dernière équation, substituer à ω sa valeur tirée de la troisième, et l'on trouvera ainsi

$$a = \frac{\Sigma r^2 dm}{M x_1};$$

et si l'on désigne par Mk^2 le moment d'inertie du corps, par rapport à une parallèle à l'axe menée par le centre de gravité, cette équation devient

$$a = x_1 + \frac{k^2}{x_1};$$

et par conséquent a est égal à la distance de l'axe fixe au centre d'oscillation du corps par rapport à cet axe.

Ainsi, pour que l'axe n'éprouve aucune percussion, il est nécessaire et suffisant :

1°. Que la force soit perpendiculaire au plan passant par l'axe et le centre de gravité du corps ;

2°. Que cet axe soit un des axes principaux du corps par rapport au point où il est rencontré par le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient la force ;

3°. Que la distance de la force à l'axe soit la même que celle du centre d'oscillation du corps autour de ce même axe.

Cette dernière condition montre que la question proposée est impossible quand le centre de gravité est sur l'axe ; car alors la force devrait se trouver à une distance infinie.

Le point où la force doit être appliquée, dans le plan passant par l'axe et le centre de gravité, se nomme *centre de percussion ;* il est situé sur la ligne qui contient les centres d'oscillation.

Réciproquement, si le corps était en mouvement autour de l'axe, on pourrait l'arrêter brusquement au moyen d'une force appliquée au centre de percussion, sans qu'il en résultât aucun effet sur l'axe, en supposant que les circonstances que nous avons indiquées aient lieu.

104. Si l'on avait seulement

$$\Sigma xzdm = 0, \qquad \Sigma yzdm = 0, \qquad Z = 0,$$

la percussion éprouvée par l'axe se réduirait à une force passant par l'origine, et qui serait détruite si l'origine était fixe. Dans ce cas, la force instantanée produirait donc un mouvement initial autour de l'axe des z comme s'il était fixe. Et il en serait de même si, au lieu d'une seule force, on en avait un nombre quelconque dans le même plan ;

car, au moyen du point fixe, elles seraient toujours réductibles à une seule.

105. *Pression exercée sur l'axe pendant le mouvement.* — A chaque instant l'équilibre qui a lieu en vertu du principe de d'Alembert, produit sur l'axe fixe des pressions que l'on calculera comme dans le cas d'une force instantanée.

Soient $X dm$, $Y dm$, $Z dm$ les composantes de la force appliquée à l'élément dm; l'équilibre devra avoir lieu entre les forces

$$X\,dm, \qquad Y\,dm, \qquad Z\,dm,$$

et les forces

$$-\frac{d^2x}{dt^2}dm, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}dm, \quad -\frac{d^2z}{dt^2}dm,$$

dont la troisième est nulle, puisque le mouvement a lieu autour de l'axe des z.

Si l'on appelle θ l'angle formé avec l'axe des x par la projection de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du corps sur l'axe des z, et ω la vitesse angulaire, on aura

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega;$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt}.$$

Si l'on décompose eucore le système de toutes les forces en trois forces dirigées suivant les axes, et trois couples situés dans les plans coordonnés, on aura pour expressions de ces

trois forces

$$\Sigma X\,dm + \omega^2 M x_1 + M y_1 \frac{d\omega}{dt},$$

$$\Sigma Y\,dm + \omega^2 M y_1 - M x_1 \frac{d\omega}{dt},$$

$$\Sigma Z\,dm.$$

Les moments des couples ayant leurs axes dirigés suivant les axes des x, y, z seront respectivement

$$\Sigma\,(yZ - zY)\,dm - \omega^2\,\Sigma\,yzdm + \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma\,xzdm,$$

$$\Sigma\,(zX - xZ)\,dm + \omega^2\,\Sigma\,xzdm + \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma\,yzdm,$$

$$\Sigma\,(xY - yX)\,dm - \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma\,r^2 dm.$$

Ce dernier est nul, par la condition d'équilibre; et la pression qui a lieu à chaque instant sur l'axe est produite par les deux autres couples et par les trois forces appliquées à l'origine.

106. *Axes permanents de rotation.* — Supposons que le corps solide, au lieu d'avoir un axe fixe, n'ait qu'un seul point fixe, et qu'on l'ait choisi pour origine. Supposons de plus qu'aucune force extérieure ne sollicite le corps; et proposons-nous de déterminer les conditions pour que le mouvement, ayant commencé autour de l'axe des z, continue comme si cet axe était fixé invariablement.

Il est évident qu'il suffit pour cela que toutes les forces que l'axe fixe devrait détruire, se trouvent détruites par le point fixe seul. Or, ce point détruit les trois composantes qui y sont appliquées, il suffit donc que les deux premiers couples soient nuls séparément; ce qui donne

$$\Sigma\,xzdm = 0, \qquad \Sigma\,yzdm = 0.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que l'axe des z soit un des axes principaux d'inertie qui se coupent au point fixe.

Ainsi, tout point lié à un corps solide jouit de la propriété que, si on le rend fixe, et que le corps commence par tourner autour d'un de ses axes principaux d'inertie, relatifs à ce point, sans qu'aucune force étrangère lui soit appliquée, il continuera de tourner uniformément autour de cet axe comme s'il était fixe. Ces trois axes, considérés sous ce point de vue, se nomment *axes permanents de rotation*, relativement au point fixe.

Si l'origine était le centre de gravité du corps, on aurait

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

et les forces qui y sont appliquées seraient nulles d'elles-mêmes, de sorte qu'il n'est plus nécessaire que ce point soit fixé, et réciproquement ces forces ne seront nulles qu'en supposant

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0;$$

d'où l'on conclut que

Si un corps entièrement libre commence à tourner autour d'un de ses axes principaux, qui se coupent en son centre de gravité, et qu'aucune force étrangère ne lui soit appliquée, son mouvement continuera uniformément autour de cet axe. Ces droites sont les seules qui jouissent de cette propriété.

Ces trois axes particuliers se désignent sous le nom d'*axes naturels de rotation*, ou d'axes permanents de rotation relatifs au centre de gravité.

(S'il y a des forces réductibles à un couple dans le plan xy, les mêmes conséquences ont lieu; seulement, la vitesse angulaire varie.)

Mouvement initial d'un corps solide, mobile autour d'un point fixe, et soumis à l'action de forces instantanées.

107. Ce mouvement peut facilement être ramené au mouvement autour d'axes fixes. D'abord, quelles que soient les forces appliquées à ce corps, on peut toujours les réduire à une force appliquée au point fixe et à un couple. La force étant détruite, le mouvement sera produit uniquement par le couple. Décomposons ce couple en trois autres, dont les axes soient dirigés suivant les axes principaux du corps, qui se coupent au point fixe, et que nous prendrons pour axes des x, y, z; et soient L, M, N les moments de ces trois couples.

Nous savons que les vitesses acquises par chaque point peuvent être obtenues en composant celles que produirait séparément chacun de ces trois couples.

Or, le couple dont le moment est L, étant compris dans le plan perpendiculaire à un axe principal, relatif à son point de rencontre avec ce plan, produirait un mouvement autour de cet axe, et sa vitesse angulaire serait égale à $\frac{L}{A}$, A étant le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe, sur lequel on compte les x (*voir* n° 104).

De même, si l'on désigne par B, C les moments d'inertie relatifs aux axes des y et des z, les deux autres couples produiraient des mouvements de rotation autour de ces axes, dont les vitesses angulaires seraient respectivement $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$. Ainsi, en représentant ces trois vitesses angulaires par ω, ω', ω'', on aura

$$\omega = \frac{L}{A}, \quad \omega' = \frac{M}{B}, \quad \omega'' = \frac{N}{C}.$$

Or, nous avons démontré que ces trois mouvements devaient se composer d'après les règles relatives aux mouvements géométriques. Il en résulte donc une rotation égale à $\sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2}$, autour d'un axe dont la direction fera, avec les axes de coordonnées, des angles α, β, γ dont les cosinus seront proportionnels à ω, ω', ω''.

Considérons maintenant l'ellipsoïde central dont l'équation est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

on sait que $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$ sont proportionnels aux cosinus des angles que fait avec les axes le diamètre conjugué du plan ayant pour équation

$$Lx + My + Nz = 0;$$

donc l'axe instantané de rotation est le diamètre conjugué de ce plan. Mais la perpendiculaire à ce plan fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à L, M, N. Cette normale n'est donc autre que l'axe du couple d'impulsion; d'où résulte la proposition suivante, due à M. Poinsot :

L'axe de la rotation produite par un couple sur un corps solide qui a un point fixe, est le diamètre conjugué du plan du couple, dans l'ellipsoïde central.

CHAPITRE XXI.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

108. Le problème dont nous allons nous occuper maintenant, peut s'énoncer ainsi : Un corps solide, ou un système rigide quelconque, lié à un point fixe, étant sollicité par des forces données, et partant d'un état initial connu, déterminer à chaque instant la position de ses différents points.

Pour cela, nous choisirons trois droites rectangulaires passant par le point fixe et liées invariablement au corps; la question sera ramenée à la détermination du mouvement de ces trois droites; et leur position se déterminera, comme nous l'avons déjà vu dans les préliminaires, soit par les angles que chacune d'elles forme avec trois axes rectangulaires fixes, soit au moyen de trois autres angles seulement, ce qui sera plus avantageux.

D'après le principe de d'Alembert, on obtiendra toutes les équations nécessaires à la détermination du mouvement, en exprimant qu'il y a équilibre à chaque instant entre les forces données et les forces d'inertie du système, considérées comme appliquées à ses points même.

On trouvera ainsi, comme on le sait, six équations, exprimant que les sommes des composantes de toutes ces forces, ainsi que de leurs moments, par rapport à trois axes rectangulaires, sont nulles. Ces trois axes peuvent être choisis à chaque instant, dans une position arbitraire. Les six équations que nous rappelons, exprimeront toujours l'équilibre qui doit avoir lieu, et seront toujours exactes par conséquent : ainsi, par exemple, il est permis de considérer à chaque instant les axes liés au corps, et de prendre les composantes des forces, parallèlement à ces axes, et leurs moments par rapport à ces mêmes axes. Les six équations obtenues ainsi, détermineront certainement le mouvement. C'est la marche que nous suivrons. Elle conduit facilement aux équations; mais comme les quantités qui y entrent dépendent de la position des axes mobiles, il restera à faire des transformations propres à déterminer les positions par rapport à des axes fixes.

109. *Composantes de la force d'inertie pour un point quelconque.* — Ces composantes rapportées à l'unité de masse sont, au signe près, celles de la force accélératrice qui

produirait sur le point libre le mouvement qu'il a; ces dernières sont, comme on le sait, les dérivées secondes, par rapport au temps, des coordonnées du point, estimées parallèlement à trois directions invariables quelconques. Nous choisirons pour ces directions celles qu'ont les axes mobiles à un instant quelconque, et que nous considérerons comme devenant invariables. Les composantes de la vitesse, par rapport aux axes mobiles, sont

$$u, \quad v, \quad w;$$

elles deviennent

$$u + du, \quad v + dv, \quad w + dw$$

après le temps dt, mais ne sont plus estimées parallèlement aux mêmes axes X_1, Y_1, Z_1; elles le sont par rapport aux directions qu'ont les axes mobiles après le temps dt, et que nous désignerons par X', Y', Z'.

Si donc on les projette toutes les trois sur chacun des axes X_1, Y_1, Z_1, on aura les composantes de la vitesse suivant ces mêmes axes après le temps dt; et si l'on en retranche respectivement u, v, w, puis qu'on divise les restes par dt, on aura les trois composantes de la force accélératrice suivant X_1, Y_1, Z_1, que nous désignerons par u', v', w'. Cela posé, les valeurs de u, v, w étant, d'après le n° 230, tome Ier,

$$(1) \qquad u = qz_1 - ry_1, \quad v = rx_1 - pz_1, \quad w = py_1 - qx_1,$$

on obtient, en les différentiant,

$$du = z_1\,dq - y_1\,dr, \quad dv = x_1\,dr - z_1\,dp, \quad dw = y\;dp - x_1\,dq.$$

Les quantités

$$u + du, \quad v + dv, \quad w + dw$$

étant connues, et comptées sur les axes X', Y', Z', doivent être projetées toutes les trois sur chacun des axes X_1, Y_1, Z_1;

il faut donc d'abord calculer les cosinus des angles des directions X', Y', Z' avec les directions X_1, Y_1, Z_1. Or, les cosinus des angles que fait la direction X_1 avec les axes fixes X, Y, Z sont

$$a, \quad a', \quad a'';$$

ceux qui se rapportent à la direction X' seront, par suite,

$$a + da, \quad a' + da', \quad a'' + da'';$$

On aura des expressions analogues pour les directions Y_1, Y' et Z_1, Z'. Il est donc facile de calculer les cosinus des angles des trois premières directions avec les trois autres.

On voit d'abord, qu'en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre, on peut remplacer les cosinus des angles infiniment petits par l'unité; d'où résulte

$$\cos X'X_1 = 1, \quad \cos Y'Y_1 = 1, \quad \cos Z'Z_1 = 1.$$

On trouvera ensuite

$$\begin{aligned} \cos Y'Z_1 &= (b + db)c + (b' + db')c' + (b'' + db'')c'' \\ &= cdb + c'db' + c''db'', \end{aligned}$$

et de même

$$\cos Y_1 Z' = bdc + b'dc' + b''dc'';$$

et comme on a

$$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

on en tire

$$bdc + b'dc' + b''dc'' + cdb + c'db' + c''db'' = 0.$$

D'ailleurs on a (n° 230, tome Ier)

$$cdb + c'db' + c''db'' = pdt;$$

donc

$$\cos Y'Z_1 = -\cos Z'Y_1 = pdt.$$

On trouverait des résultats semblables pour les autres angles; ce qui nous donne

$$\cos Y'Z_1 = -\cos Z'Y_1 = pdt,$$
$$\cos Z'X_1 = -\cos X'Z_1 = qdt,$$
$$\cos X'Y_1 = -\cos Y'X_1 = rdt \text{ (*)}.$$

Rien n'est donc plus facile, maintenant, que de former les valeurs de u', v', w'; et l'on trouve, toutes réductions faites,

$$(2)\quad \begin{cases} u' = z_1 \dfrac{dq}{dt} - y_1 \dfrac{dr}{dt} + q(py_1 - qx_1) - r(rx_1 - pz_1), \\ v' = x_1 \dfrac{dr}{dt} - z_1 \dfrac{dp}{dt} + r(qz_1 - ry_1) - p(py_1 - qx_1), \\ w' = y_1 \dfrac{dp}{dt} - x_1 \dfrac{dq}{dt} + p(rx_1 - pz_1) - q(qz_1 - ry_1). \end{cases}$$

110. *Équations du mouvement.* — Si l'on désigne par X_1, Y_1, Z_1 les composantes parallèles aux axes mobiles, de la force motrice appliquée à un point quelconque, le principe de d'Alembert fournira les trois équations suivantes.

$$\Sigma(y_1 w' - z_1 v')\,dm = \Sigma(y_1 Z_1 - z_1 Y_1),$$
$$\Sigma(z_1 u' - x_1 w')\,dm = \Sigma(z_1 X_1 - x_1 Z_1),$$
$$\Sigma(x_1 v' - y_1 u')\,dm = \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1).$$

Les sommes indiquées dans les premiers membres se rapportent à la masse entière, et celles du second, aux forces

(*) On voit, par ces formules, que les quantités pdt, qdt, rdt, qui déterminent l'axe instantané de rotation, et les composantes de la vitesse angulaire, ont une autre signification géométrique remarquable. Elles représentent les cosinus des angles que font deux à deux les directions des axes liés au corps, avec leur position infiniment voisine. Cette remarque a été faite pour la première fois, je pense, dans la première édition de cette Mécanique.

extérieures qui peuvent être appliquées, tant à tous les points du corps qu'à certains points particuliers en nombre fini. Ces dernières peuvent être exprimées à chaque instant d'après les éléments qui déterminent la position du corps; ce sont donc des fonctions connues des angles φ, ψ, θ, et peut-être de t, dans le cas où les forces dépendraient du temps.

Quant aux premiers membres, ils auront une expression extrêmement simple si l'on choisit les axes principaux d'inertie du corps pour les axes X_1, Y_1, Z_1. Alors les sommes $\Sigma y_1 z_1 dm$, $\Sigma z_1 x_1 dm$, $\Sigma x_1 y_1 dm$ sont nulles; et si l'on désigne par A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes respectifs des x_1, y_1, z_1, et par L, M, N les fonctions connues, qui sont les expressions des seconds membres, on aura les trois équations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + L,\\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + M,\\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + N. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations, jointes aux équations (3), forment un système de six équations différentielles du premier ordre, qui déterminera les six fonctions p, q, r, φ, ψ, θ en fonction de t. Les six constantes arbitraires se détermineront par les positions et les vitesses initiales.

Propriétés diverses de ce mouvement dans le cas où il n'existe pas de forces extérieures.

111. *Application du principe des aires.* — Lorsqu'un corps solide est en mouvement autour d'un point fixe, les vitesses dont tous ses points sont animés à une époque quel-

conque pourraient être produites à ce moment par des forces instantanées, agissant sur le corps en repos dans cette position; et toutes ces forces, en vertu du point fixe, seraient réductibles à un couple. Ce couple est identique avec celui qui résulterait des quantités de mouvement qui animent les différents points du corps. Si l'on décompose l'un et l'autre de ces couples en trois autres dont les axes soient dirigés suivant trois droites rectangulaires fixes, les couples composants seront respectivement les mêmes.

Or, le principe des aires apprend que, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, les sommes des moments des quantités de mouvement, par rapport à trois axes fixes, sont constantes, et donnent par conséquent un moment constant dont l'axe a une direction constante. Les forces instantanées qui produiraient à chaque instant sur le corps en repos, dans la position qu'il occupe à cet instant, les vitesses qui ont lieu, sont donc réductibles à un couple qui a toujours même axe et même moment. Cherchons à déterminer cet axe et ce moment.

Considérons pour cela les quantités de mouvement décomposées à un instant quelconque suivant les axes principaux d'inertie sur lesquels se comptent les x_1, y_1, z_1. Les moments des couples auxquels elles donnent naissance auront pour expressions

$$\Sigma(y_1 w - z_1 v)\,dm, \quad \Sigma(z_1 u - x_1 w)\,dm, \quad \Sigma(x_1 v - y_1 u)\,dm;$$

substituant les valeurs de u, v, w, données par les équations (1), on trouvera

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma(y_1 w - z_1 v)\,dm = \mathrm{A}p, \\ \Sigma(z_1 u - x_1 w)\,dm = \mathrm{B}q, \\ \Sigma(x_1 v - y_1 u)\,dm = \mathrm{C}r. \end{cases}$$

Ces quantités ne sont pas constantes parce que les axes

des $x_1 y_1 z_1$ ne sont pas fixes; mais la somme de leurs carrés est constante, puisque le moment résultant est constant : désignant la valeur de ce moment par k, on aura

$$(5) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Lorsque l'on connaît l'état initial du corps, c'est-à-dire sa position initiale, et les vitesses initiales ou les forces instantanées qui les ont produites, on connaît les valeurs initiales de Ap, Bq, Cr, et par suite de p, q, r.

Si nous désignons par OK la direction de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, on aura, pour déterminer cette direction par rapport aux axes mobiles,

$$(6) \qquad \cos KOX_1 = \frac{Ap}{k}, \quad \cos KOY_1 = \frac{Bq}{k}, \quad \cos KOZ_1 = \frac{Cr}{k},$$

et, par rapport aux axes fixes,

$$(7) \qquad \begin{cases} \cos KOX = \dfrac{A\,ap + B\,bq + C\,cr}{k}, \\ \cos KOY = \dfrac{A\,a'p + B\,b'q + C\,c'r}{k}, \\ \cos KOZ = \dfrac{A\,a''p + B\,b''q + C\,c''r}{k}. \end{cases}$$

Les numérateurs de ces expressions seront constants, puisque la direction de OK est fixe.

Les formules (4) prouveraient, si on ne l'avait déjà démontré, que les cosinus des angles que l'axe instantané fait avec X_1, Y_1, Z_1 sont respectivement de même signe que p, q, r.

En effet, les composantes de la rotation instantanée suivant les directions des axes principaux d'inertie du corps, sont les rotations que produiraient les couples composants Ap, Bq, Cr; elles sont donc de même signes que ces couples, et par conséquent que p, q, r.

112. *Application du principe des forces vives.* — On sait que le principe des forces vives ne cesse pas d'avoir lieu lorsque des points d'un système sont liés à des points fixes; et que les forces qui proviennent de ces derniers points n'entrent pour rien dans le résultat. Dans le cas actuel, où les forces extérieures sont nulles, la somme de ces forces vives sera constante. Désignons par h sa valeur; ce sera une constante connue, si on donne l'état initial du corps; pour la calculer, remarquons que le carré de la vitesse du point qui a pour coordonnées x_1, y_1, z_1, est

$$u^2+v^2+w^2=p^2(y_1^2+z_1^2)+q^2(z_1^2+x_1^2)+r^2(x_1^2+y_1^2)$$
$$-2qry_1z_1-2rpz_1x_1-2pqx_1y_1.$$

Multipliant par dm et intégrant dans toute l'étendue de la masse, on aura la somme h des forces vives à un instant quelconque; on trouvera ainsi

$$(8) \qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h.$$

On voit que si aux deux équations (5), (8) on joignait la condition que la vitesse angulaire $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ fût constante, on aurait entre p, q, r trois équations qui les détermineraient si A, B et C sont inégaux; et l'axe de rotation serait fixe. Dans ce cas, les équations (3) exigent que deux des quantités p, q, r soient nulles, puisque dp, dq, dr, L, M, N sont tous nuls. Le mouvement a donc lieu autour de l'un des axes principaux d'inertie, comme il était facile de le prévoir.

113. *Angle de l'axe instantané et de l'axe du couple résultant.* — Si l'on désigne par ε l'angle de ces deux axes, on trouvera, d'après les valeurs des cosinus des angles qu'ils forment avec X_1, Y_1, Z_1,

$$\cos\varepsilon=\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

ou

$$\cos \varepsilon = \frac{h}{k\omega}.$$

Cette équation donne

$$\omega \cos \varepsilon = \frac{h}{k},$$

et démontre cette propriété remarquable, que la *vitesse angulaire instantanée donne une composante constante par rapport à l'axe du couple résultant, qui est celui du maximum des aires, ou du plan invariable.*

114. *Position de l'axe instantané par rapport à l'ellipsoïde central.* — L'équation de l'ellipsoïde central étant

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = 1,$$

les cosinus des angles que la normale au point quelconque $x_1 y_1 z_1$ fait avec les axes mobiles, sont proportionnels aux quantités Ax_1, By_1, Cz_1.

Mais les cosinus qui se rapportent à l'axe du couple résultant sont proportionnels à Ap, Bq, Cr. Ces deux droites se confondront donc si l'on a $\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}$, c'est-à-dire si le rayon de l'ellipsoïde mené au point $x_1 y_1 z_1$ se confond avec l'axe instantané de rotation; d'où résulte cette proposition, qui se trouve, ainsi que la précédente, dans le Mémoire de M. Poinsot sur la rotation des corps :

Si l'on mène à l'ellipsoïde central un plan tangent parallèle au plan du couple résultant, le rayon mené au point de contact est l'axe instantané de rotation.

115. *Vitesse angulaire en fonction du rayon de l'ellipsoïde.* — Les coordonnées du pôle de rotation sur l'ellipsoïde central, c'est-à-dire du point où cette surface est percée par l'axe instantané, étant proportionnelles à p, q, r, on a les égalités suivantes, dans lesquelles R désigne la lon-

gueur du rayon de l'ellipsoïde, et P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent :

$$\frac{x_1}{p}=\frac{y_1}{q}=\frac{z_1}{r}$$

$$=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{\sqrt{Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2}}{\sqrt{Ap^2+Bq^2+Cr^2}}=\frac{\sqrt{A^2x_1^2+B^2y_1^2+C^2z_1^2}}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}.$$

Les trois derniers membres fournissent les équations suivantes :

$$\frac{R}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{Pk}; \quad \text{d'où} \quad \omega=R\sqrt{h}, \quad \text{et} \quad P=\frac{\sqrt{h}}{k}.$$

On déduit de là plusieurs propositions importantes qui sont dues à M. Poinsot.

L'équation $\omega = R\sqrt{h}$ fournit d'abord celle-ci :

La vitesse angulaire est proportionnelle à la longueur du rayon de l'ellipsoïde, autour duquel a lieu la rotation instantanée.

L'équation $P=\frac{\sqrt{h}}{k}$ prouve que la perpendiculaire abaissée du point fixe sur le plan qui touche l'ellipsoïde au pôle de rotation, est constante. Or, ce plan est d'ailleurs parallèle au plan fixe du couple résultant; donc il est constant de position. D'où se déduit cette autre proposition :

L'ellipsoïde central reste constamment tangent au plan mené parallèlement à celui du couple résultant, à une distance égale à $\frac{\sqrt{h}}{k}$. *Son point de contact est le pôle de rotation, et, par conséquent, n'a aucun mouvement de glissement sur le plan fixe.*

Cette propriété donne une représentation géométrique très-nette de la marche suivie par le corps.

116. *Courbe des pôles.* — D'après ce qui vient d'être dit, si l'on conçoit un plan qui se meuve en restant tan-

gent à l'ellipsoïde central et à une sphère concentrique ayant pour rayon $\frac{\sqrt{h}}{k}$, le lieu de ces points de contact avec l'ellipsoïde sera la courbe des pôles; elle sera symétrique par rapport à deux des plans principaux, et sera déterminée par rapport aux axes principaux du corps par les deux équations

$$\mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{B}y_1^2 + \mathrm{C}z_1^2 = 1,$$

$$\mathrm{A}^2x_1^2 + \mathrm{B}^2y_1^2 + \mathrm{C}^2z_1^2 = \frac{k^2}{h},$$

d'où l'on tire la suivante :

$$(9)\quad \mathrm{A}(k^2 - \mathrm{A}h)x_1^2 + \mathrm{B}(k^2 - \mathrm{B}h)y_1^2 + \mathrm{C}(k^2 - \mathrm{C}h)z_1^2 = 0,$$

équation d'un cône du second degré ayant ses axes principaux dans la même direction que ceux de l'ellipsoïde, et qui est le lieu des axes instantanés, relativement au corps. Pour reconnaître le sens de ses deux nappes, soient A le plus grand moment d'inertie, et C le plus petit. On trouvera facilement

$$(10)\quad \begin{cases} k^2 - \mathrm{A}h = \mathrm{B}(\mathrm{B} - \mathrm{A})q^2 + \mathrm{C}(\mathrm{C} - \mathrm{A})r^2, \\ k^2 - \mathrm{B}h = \mathrm{C}(\mathrm{C} - \mathrm{B})r^2 + \mathrm{A}(\mathrm{A} - \mathrm{B})p^2, \\ k^2 - \mathrm{C}h = \mathrm{A}(\mathrm{A} - \mathrm{C})p^2 + \mathrm{B}(\mathrm{B} - \mathrm{C})q^2. \end{cases}$$

Ainsi l'on aura

$$k^2 - \mathrm{A}h < 0 \quad \text{et} \quad k^2 - \mathrm{C}h > 0.$$

On obtiendrait immédiatement ces deux inégalités en observant que $\frac{h}{k^2}$ est le carré de la distance du centre au plan tangent au point $x_1 y_1 z_1$ de l'ellipsoïde; d'où il résulte

$$\frac{h}{k^2} > \frac{1}{\mathrm{A}},\quad \frac{h}{k^2} < \frac{1}{\mathrm{C}}.$$

De sorte que les sections elliptiques du cône seront perpen-

diculaires à l'axe des x si l'on a

$$k^2 - Bh > 0,$$

et elles le seront à l'axe des z si l'on a

$$k^2 - Bh < 0.$$

Ces deux axes sont ceux du plus petit et du plus grand moment d'inertie du corps.

Si $B = C$, le cône est de révolution autour de l'axe des x; si $B = A$, il l'est autour de l'axe des z; si $A = B = C$, p, q, r sont constants d'après les équations, et le mouvement s'effectue autour d'un axe fixe.

Si k^2 est égal à une des trois quantités Ah, Bh, Ch, le cône se réduit à un plan; mais si A, B, C ne sont pas tous trois égaux, on a nécessairement

$$k^2 - Ah < 0 \quad \text{et} \quad k^2 - Ch > 0;$$

donc c'est seulement $k^2 - Bh$ qui peut être nul, et dans ce cas le lieu des axes instantanés a pour équation

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} = \frac{C(k^2 - Ch)}{A(Ah - k^2)} = \frac{C(B - C)}{A(A - B)}.$$

C'est l'ensemble de deux plans passant par l'axe y_1 qui est celui du moyen moment d'inertie; ils coupent l'ellipsoïde suivant deux ellipses qui sont le lieu des pôles, et, par conséquent, jouissent de la propriété que la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde en un point quelconque de ces ellipses est constante; cette distance est évidemment la longueur du demi-axe moyen de l'ellipsoïde.

Si $k^2 - Bh$ est positif, le cône entoure l'axe des x, et l'équation (16) donne

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} > \frac{C(k^2 - Ch)}{A(Ah - k^2)} > \frac{C(B - C)}{A(A - B)};$$

donc toutes les génératrices situées du côté des z_1 positifs sont au-dessous des deux ellipses précédentes. Si, au contraire, $k^2 - Bh$ est négatif, elles sont au-dessus. De sorte que ces deux ellipses partagent l'ellipsoïde en quatre fuseaux tels, que quand l'axe instantané se trouve, à une époque quelconque, dans l'intérieur de l'un d'eux, il y reste toujours et se meut autour de l'axe principal situé dans ce même fuseau; et s'il se trouve dans un des plans qui les séparent, il y reste constamment.

On remarquera que s'il y a deux axes presque égaux, l'un des fuseaux devient très-étroit, et la courbe des pôles, tout en ayant une grande étendue dans son fuseau, pourrait passer très-près de l'extrémité du petit ou du grand axe; il n'y a donc pas toujours stabilité pour l'axe instantané lorsque dans l'état initial il est très-voisin de l'axe principal du plus petit ou du plus grand moment d'inertie; mais, s'il n'y a pas deux axes presque égaux, et que l'axe instantané soit très-voisin du plus petit ou du plus grand, il s'en éloignera très-peu dans tout le cours du mouvement.

S'il est d'abord voisin de l'axe moyen, la courbe des pôles s'éloignera toujours considérablemnet de l'extrémité de cet axe, et la stabilité n'est plus démontrée. Il faudrait pour cela que le pôle ne parcourût pas toute la courbe, et cela demande examen.

La courbe des pôles étant tracée et la vitesse initiale de rotation étant connue, ainsi que l'axe instantané autour duquel elle a lieu, on peut se représenter facilement le mouvement indéfini du corps. En effet, après un temps infiniment petit, on saura de quel angle le corps aura tourné; on saurait donc déterminer le point de la courbe des pôles qui devient le point de contact avec le plan fixe; on connaîtrait donc le rayon de l'ellipsoïde, et, par suite, la nouvelle valeur de la vitesse de rotation; on trouverait de

même la position et la vitesse après un autre intervalle de temps infiniment petit, et ainsi de suite indéfiniment.

Il est facile de voir comment on pourrait déterminer la courbe formée sur le plan fixe par les positions successives du pôle. Nous n'entrerons dans aucun détail à cet égard.

117. *Seconde représentation géométrique du mouvement du corps.*— L'axe instantané de rotation décrit dans l'espace une surface conique qui a son centre au point fixe, et pour base la courbe tracée sur le plan fixe par le pôle. Admettons qu'elle soit connue : il est facile de voir qu'elle sera toujours tangente à la surface conique liée au corps et qui est le lieu des positions de l'axe instantané dans le corps. En effet, l'axe instantané sera à chaque instant sur ces deux surfaces; elles ont donc toujours une génératrice commune. Au bout d'un temps infiniment petit, une génératrice infiniment voisine, appartenant au cône mobile, vient coïncider avec une génératrice du cône fixe; et comme dans ce mouvement elle ne se déplace que d'infiniment petits du second ordre, il s'ensuit que si sur les deux cônes on prend, à partir de l'arête commune, deux arêtes correspondantes, distantes de la première de quantités infiniment petites du premier ordre, elles seront distantes l'une de l'autre de quantités du second ordre : d'où il résulte que les deux cônes sont tangents. D'ailleurs le cône mobile ne glisse pas sur l'autre, puisque l'arête de contact est l'axe instantané de rotation. Donc enfin *le mouvement du corps peut être produit au moyen d'un cône du second degré lié invariablement au corps, et qui roule sur un autre cône dont la surface est engendrée par une droite qui tourne indéfiniment en ondulant autour de l'axe du couple résultant.*

118. *Lieu des positions successives de l'axe du couple résultant dans l'intérieur du corps.* — Si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque de l'axe de ce couple par rapport aux axes mobiles, on aura les équations

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{Ap}{Cr}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{Bq}{Cr}.$$

Les équations (12) et (15) conduisent à la suivante

$$A(k^2 - Ah)p^2 + B(k^2 - Bh)q^2 + C(k^2 - Ch)r^2 = 0.$$

Éliminant $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ entre ces trois équations, on aura l'équation de la surface cherchée, qui sera

$$\left(\frac{k^2}{A} - h\right)x_1^2 + \left(\frac{k^2}{B} - h\right)y_1^2 + \left(\frac{k^2}{C} - h\right)z_1^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré dont les sections perpendiculaires à l'axe du plus petit, ou bien du plus grand moment d'inertie, sont des ellipses.

Si $B = C$, il est de révolution autour de l'axe des x. Si $A = B$, il l'est autour de l'axe des z.

Si $A = B = C$, on a $k^2 = Ah$; les équations (20) et (21) sont identiques, et l'équation qu'on en avait tirée n'apprend plus rien; mais les deux précédentes deviennent

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{p}{r}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{q}{r},$$

ce qui montre que l'axe du couple résultant et l'axe instantané de rotation se confondent. C'est ce que l'on aurait déduit aussi de la formule qui donne l'angle de ces deux directions. C'est le cas où le mouvement a lieu autour d'un axe invariable.

119. *Formules diverses.* — On peut obtenir des relations utiles en identifiant les seconds membres des équations (4) avec les sommes des projections sur x, y, z, des quantités u, v, w, données par les équations (5). En égalant de part et d'autre les coefficients de x_1, y_1, z_1, on obtient les neuf équations suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{da}{dt} = br - cq, & \dfrac{da'}{dt} = b'r - c'q, & \dfrac{da''}{dt} = b''r - c''q, \\ \dfrac{db}{dt} = cp - ar, & \dfrac{db'}{dt} = c'p - a'r, & \dfrac{db''}{dt} = c''p - a''r, \\ \dfrac{dc}{dt} = aq - bp, & \dfrac{dc'}{dt} = a'q - b'p, & \dfrac{dc''}{dt} = a''q - b''p. \end{array}\right.$$

On tire encore de ces équations les trois suivantes :

$$pda + qdb + rdc = 0,$$
$$pda' + qdb' + rdc' = 0,$$
$$pda'' + qdb'' + rdc'' = 0.$$

Calcul du cas particulier où le corps n'est sollicité par aucune force extérieure.

120. S'il n'existe aucune force extérieure, on a

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

et les équations (10) se réduisent à

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{array}\right.$$

Si l'on multiplie la première par p, la seconde par q, la

troisième par r, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\mathrm{A}p\,\frac{dp}{dt}+\mathrm{B}q\,\frac{dq}{dt}+\mathrm{C}r\,\frac{dr}{dt}=0;$$

d'où, en intégrant,

(20) $$\mathrm{A}p^2+\mathrm{B}q^2+\mathrm{C}r^2=h,$$

h désignant une constante arbitraire, qui, d'après ce que nous avons trouvé précédemment, est la somme des forces vives du système.

On aura une autre intégrale en multipliant respectivement les équations (19) par $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$ et les ajoutant. En effet, on trouve d'abord

$$\mathrm{A}^2p\,\frac{dp}{dt}+\mathrm{B}^2q\,\frac{dq}{dt}+\mathrm{C}^2r\,\frac{dr}{dt}=0,$$

d'où

(21) $$\mathrm{A}^2p^2+\mathrm{B}^2q^2+\mathrm{C}^2r^2=k^2,$$

k désignant une nouvelle constante arbitraire, qui est, comme nous l'avons vu, le moment du couple résultant des quantités de mouvement du système. Ces deux constantes h et k, ainsi que les valeurs initiales de p, q, r, sont faciles à déduire des données initiales. En effet, la direction de l'axe du couple résultant et son moment sont connus, soit que l'on donne les forces instantanées qui produisent les vitesses initiales, soit qu'on donne ces vitesses mêmes. Ainsi d'abord k est connu; ses couples composants par rapport aux axes X_1, Y_1, Z_1, dont la position initiale est donnée, sont donc aussi connus; et comme leurs moments sont respectivement $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$, il en résulte que p, q, r sont connus en grandeur et en signe, au commencement du mouvement. Donc aussi, d'après l'équation (20), la constante h sera elle-même connue.

Si l'on tire des équations (20) et (21) les valeurs de

p et q en r, et qu'on les reporte dans la troisième équation (19), on obtiendra une équation qui donnera t en fonction de r au moyen d'une quadrature. On trouvera d'abord

$$(22)\qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{k^2 - Bh + C(B - C)r^2}{A(A - B)}, \\ q^2 = \dfrac{k^2 - Ah + C(A - C)r^2}{B(B - A)}. \end{cases}$$

Quant aux signes qu'on devra prendre pour p, q, r, ils sont connus, dans l'état initial, d'après la position de l'axe du couple résultant relativement aux axes principaux, qui sont eux-mêmes connus à cet instant. Les cosinus des angles que fait l'axe de ce couple avec les trois directions étant $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$, les valeurs et les signes de p, q, r sont connus à cette époque. Les équations (19) donnent les dérivées de p, q, r en fonction de ces quantités; elles conservent leur signe primitif tant que p, q, r conservent le leur; et, par suite, ces dernières quantités varient toujours dans le même sens tant qu'aucune d'elles ne devient nulle. Si, par exemple, p passe par zéro, la première des équations (19) donnant la valeur de $\frac{dp}{dt}$ à cet instant, apprend quel va être le signe de p immédiatement après, et l'on raisonnera de même toutes les fois qu'une des trois quantités deviendra nulle; on n'aura donc jamais d'incertitude sur les signes de p, q, r.

Les valeurs de p, q données par les équations (22), étant reportées dans la troisième équation (19), donnent, en supposant, pour fixer les idées, que l'on doive prendre le même signe pour p et q,

$$(23)\qquad dt = \frac{C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{k^2 - Bh + C(B - C)r^2}\,\sqrt{Ah - k^2 + C(C - A)r^2}}.$$

L'intégrale du second membre ne peut être obtenue généralement ; elle dépend des fonctions elliptiques. Elle devient intégrable si deux des trois quantités A, B, C sont égales, ou si k^2 est égal à une des trois suivantes Ah, Bh, Ch, et nous avons vu que ce ne peut être qu'à la moyenne.

En supposant qu'on ait intégré l'équation (23), on aura t en fonction de r, et la constante sera déterminée par la valeur initiale de r; on en conclura r en fonction de t, ainsi que p et q, d'après les équations (22).

Il ne reste donc plus, pour avoir la solution complète du problème, qu'à connaître les angles φ, θ, ψ au moyen de p, q, r; et nous avons pour cela les trois équations suivantes, qui se déduisent des formules du n° 228, tome Ier :

$$(24)\quad \begin{cases} p = \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ q = -\sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ r = \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

On pourra encore faire usage des formules (13), dont une rentre dans les deux autres.

Mais, pour plus de simplicité, il conviendra de prendre l'axe du couple résultant pour un des axes de coordonnées, par exemple pour axe des z.

Les premiers membres des équations (13) ne sont alors autre chose que a'', b'', c'', et, d'après les valeurs de ces dernières en fonction de φ, θ, ψ, données dans les préliminaires, ces équations deviennent

$$(25)\quad \frac{Ap}{k} = \sin\theta \sin\varphi, \quad \frac{Bq}{k} = \sin\theta \cos\varphi, \quad \frac{Cr}{k} = \cos\theta.$$

Ces équations déterminent donc $\cos\theta$ et $\tang\varphi$ en fonction de p, q, r, et par suite de t. Ces lignes trigonométriques

étant connues à chaque instant, sans ambiguïté de signe, les angles eux-mêmes, qui varient d'une manière continue, seront complétement déterminés. Il ne reste donc plus qu'à connaître l'angle ψ, et pour cela, on fera usage des équations (24). En éliminant $\frac{d\theta}{dt}$ des deux premières, on obtient

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \sin \theta \frac{d\psi}{dt},$$

ou

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{k \sin \theta} = \sin \theta \frac{d\psi}{dt},$$

d'où

$$Ap^2 + Bq^2 = k \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = k \left(1 - \frac{C^2 r^2}{k^2}\right) \frac{d\psi}{dt} = h - Cr^2;$$

on tire de là

$$(26) \qquad d\psi = \frac{k(h - Cr^2)}{k^2 - C^2 r^2} dt.$$

Si l'on remet maintenant pour dt sa valeur donnée par l'équation (23), on aura, sans ambiguïté de signes, d'après les discussions précédentes, la valeur de $d\psi$ en fonction de r et dr. L'angle ψ sera donc connu en fonction de r et par suite de t, par une intégration qui se réduit aux fonctions elliptiques, et pourra être effectuée exactement dans les mêmes cas que celle qui se rapporte à dt. La constante se déterminera par les valeurs initiales de ψ et r.

Cas particulier où A = B.

121. Dans ce cas, les équations (19) se réduisent à

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad r = n,$$

n étant une constante déterminée par l'état initial, et

$$(\alpha) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{A - C}{A} nq,$$

$$(\beta) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{C - A}{A} np;$$

d'où l'on tire

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = 0,$$

et, par suite,

$$p^2 + q^2 = m^2,$$

m^2 étant une constante arbitraire.

On voit donc que la vitesse angulaire sera constante, quoique p et q ne le soient pas; elle aura pour valeur

$$\omega = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Les équations (20), (21) auraient donné les mêmes résultats. Pour avoir p en fonction de t, on éliminera q entre les équations (α), (β), en différentiant la première et y remettant pour $\frac{dq}{dt}$ sa valeur tirée de la seconde.

On trouve ainsi, en posant $\frac{A - C}{A} = \mu$,

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 n^2 p = 0,$$

d'où

$$p = M \sin(\mu nt + \varepsilon),$$

M et ε étant des constantes arbitraires; on aura, par suite,

$$q = \frac{1}{\mu n}\frac{dp}{dt} = M\cos(\mu nt + \varepsilon);$$

et comme $p^2 + q^2 = m^2$, on aura

$$M = \pm m.$$

En considérant donc comme susceptible d'un signe quelconque la constante arbitraire m, on aura pour p, q les valeurs suivantes :

$$(\gamma) \qquad p = m \sin(\mu nt + \varepsilon), \quad q = m \cos(\mu nt + \varepsilon);$$

pour déterminer les constantes m, ε, soient p_0, q_0 les valeurs initiales de p et q, nous aurons

$$p_0 = m \sin \varepsilon, \quad q_0 = m \cos \varepsilon, \quad m = \pm\sqrt{p_0^2 + q_0^2}.$$

L'angle ε sera déterminé quand on aura choisi le signe de m, puisque l'on connaîtra son sinus et son cosinus. Le changement de signe de m ferait seulement varier ε de 180 degrés ; ainsi on sera libre de prendre pour m le signe que l'on voudra ; nous choisirons, par exemple,

$$m = +\sqrt{p_0^2 + q_0^2}.$$

Cherchons maintenant les angles φ, ψ, θ.

Les équations (25) donnent

$$\cos\theta = \frac{Cn}{k}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{p}{q} = \operatorname{tang}(\mu nt + \varepsilon).$$

Deux arcs qui ont même tangente ne peuvent différer que par un nombre entier de demi-circonférences. Donc φ et $\mu nt + \varepsilon$ ne diffèrent que d'un multiple de π qu'on peut choisir arbitrairement. Introduisant de préférence la valeur initiale φ_0 de φ, on aura évidemment

$$\varphi = \varphi_0 + \mu nt.$$

L'équation (26) devient

$$d\psi = \frac{k(h - Cn^2)}{k^2 - C^2n^2}\, dt = \frac{k}{A}\, dt,$$

et donne

$$\psi = \frac{k}{A} t + \psi_0,$$

ψ_0 étant la valeur initiale connue de ψ.

La valeur constante de $\cos\theta$ nous apprend que l'axe de révolution de l'ellipsoïde central décrit un cône de révolution autour de l'axe fixe du couple résultant, et que, par conséquent, le plan de l'équateur conserve une inclinaison constante sur celui du couple résultant.

La valeur de ψ montre que la trace de l'équateur de cet ellipsoïde sur le plan fixe du couple résultant se meut uniformément, et que par conséquent l'axe de révolution décrit aussi uniformément sa surface conique. La valeur de φ prouve qu'un rayon déterminé quelconque de l'équateur se meut uniformément par rapport à la trace variable de l'équateur sur le plan du couple résultant. Mais la vitesse angulaire de ce mouvement, qui est μn, ne doit pas être confondue avec la vitesse angulaire du corps, qui est $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Enfin l'axe instantané fait avec l'axe des z_1 un angle constant, puisque son cosinus est $\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; il trace donc un cercle sur l'ellipsoïde de révolution.

On remarquera, de plus, que l'*axe instantané, l'axe de révolution et l'axe du couple résultant sont constamment dans un même plan*. Il suffit de prouver pour cela que les cosinus des angles que l'axe instantané et l'axe du couple résultant font avec les axes des x_1 et y_1, sont proportionnels; car alors ils seront dans un plan passant par l'axe des z_1, qui est l'axe de figure. Or le rapport des deux premiers cosinus est $\frac{p}{q}$; le rapport

des deux autres est $\frac{a''}{b''}$, et, d'après les équations (25), il est égal à $\frac{Ap}{Bq}$ ou $\frac{p}{q}$, comme il fallait le démontrer.

Cas particulier où $k^2 = Bh$.

122. Nous avons vu que, dans ce cas, le lieu des axes instantanés ne pouvait être que l'une des deux ellipses dont les plans sont représentés par l'équation

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} = \frac{B-C}{A-B} \cdot \frac{C}{A};$$

tirant des équations (20), (21) les valeurs de p et r en fonction de q, on trouve

$$p^2 = \frac{(C-B)(k^2-B^2q^2)}{BA(C-A)}, \quad r^2 = \frac{(B-A)(k^2-B^2q^2)}{BC(C-A)},$$

équations qui montrent que l'on aura toujours

$$k^2 - B^2q^2 > 0, \quad \text{ou} \quad q^2 < \frac{k^2}{B^2};$$

on en conclura

$$B\frac{dq}{dt} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}}\,\frac{dq}{(k^2-B^2q^2)},$$

d'où, en supposant dq positif,

$$dt = \frac{B^2\sqrt{AC}}{\sqrt{(C-B)(B-A)}}\,\frac{dq}{k^2-B^2q^2}.$$

En posant

$$\frac{k}{B} = m, \quad \frac{2k\sqrt{(C-B)(B-A)}}{B\sqrt{AC}} = \mu,$$

on trouve, en désignant par α une constante arbitraire,

$$\mu t = \mathrm{l.}\,\frac{m+q}{\alpha(m-q)},$$

d'où l'on tire

$$q = m\,\frac{\alpha e^{\mu t} - 1}{\alpha e^{\mu t} + 1}.$$

Si l'on désigne par q_0 la valeur initiale de q, on aura

$$q_0 = \frac{m(\alpha - 1)}{\alpha + 1}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{m + q_0}{m - q_0},$$

et, par suite,

$$q = m\,\frac{(m + q_0)e^{\mu t} + q_0 - m}{(m + q_0)e^{\mu t} + m - q_0}.$$

Au moyen de cette valeur de q, on connaîtra p et r en fonction de t.

Les équations (25) feront donc connaître θ et φ au moyen de t. L'équation (26) donnera, en remettant pour r sa valeur en fonction de q,

$$d\psi = \mathrm{B}m\,\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{B})m^2 + (\mathrm{B}-\mathrm{A})q^2}{\mathrm{A}(\mathrm{C}-\mathrm{B})m^2 + \mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{A})q^2}\,dt,$$

ce qui s'intégrera sans peine en substituant la valeur de q en t. A mesure que t croît indéfiniment, q tend vers la limite m ou $\frac{k}{\mathrm{B}}$, et par conséquent p et r vers zéro. L'axe instantané de rotation tend donc alors vers le prolongement de l'axe moyen de l'ellipsoïde, sur lequel sont comptés les y_1 positifs. On a donc ici, comme l'a annoncé M. Poinsot, le cas remarquable, où l'axe instantané étant pris d'abord très-près de l'axe du moment moyen, ne s'en écarterait jamais que très-peu, et même s'en rapprocherait indéfiniment.

Mais il faut faire une observation importante. La valeur limite de q est $+\frac{k}{B}$ lorsque le signe de dq est positif comme nous l'avons supposé; cela exigeait que p et r eussent des valeurs initiales de même signe, et alors ces signes se conservaient parce que p ou r ne peuvent devenir nuls que si q^2 devient égal à m^2, ce qui n'arrivera que pour $t=\infty$. Si, au contraire, p et r avaient été donnés de signes contraires dans l'état initial, on aurait pris pour la valeur de dq le signe contraire à celui qu'on a pris, ce qui revient à changer μ en $-\mu$ dans le résultat. On trouverait alors $-m$ pour limite de q; de sorte que l'axe instantané tendra vers l'un ou l'autre des deux sens opposés de l'axe moyen de l'ellipsoïde, suivant que p et r seront donnés de mêmes signes ou de signes contraires dans la position initiale, ou, en d'autres termes, suivant que l'axe instantané, dans sa position initiale, fera, avec les axes des x_1 et des z_1 positifs, des angles à la fois aigus ou obtus, ou bien l'un aigu et l'autre obtus.

Du double mouvement d'un corps solide libre.

123. Lorsqu'un corps solide se meut dans l'espace, en vertu d'impulsions primitives et de forces continues quelconques, on peut considérer son mouvement, pendant chaque intervalle de temps infiniment petit, comme composé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

Pour cela, on prendra l'un quelconque des points de ce corps, et à chaque instant on donnera au système un mouvement, par lequel chaque point décrira une droite infiniment petite, égale et parallèle à celle que doit décrire, pendant cet intervalle de temps, le point particulier que l'on considère; puis on supposera ce point immobile, et

l'on fera tourner le corps, jusqu'à ce que chaque point ait pris la position qu'il devait occuper à la fin de ce même intervalle.

Le point dont le mouvement règle à chaque instant le mouvement de translation du système, peut être pris arbitrairement, pourvu qu'il y soit lié invariablement; mais il y a beaucoup d'avantage, comme nous allons le voir, à choisir le centre de gravité du corps.

En effet, nous avons démontré que ce point se meut de la même manière que si toute la masse du corps s'y trouvait réunie et que toutes les forces qui agissent y fussent appliquées. On connaîtra donc immédiatement la direction et la grandeur de la vitesse initiale qu'il prendra en vertu des impulsions données.

Pour achever de connaître le mouvement initial, concevons toutes les forces données réduites à une force appliquée au centre de gravité et un couple. Nous pourrons, comme nous l'avons démontré n° 44, déterminer les deux mouvements qui auraient lieu séparément par l'action de cette force, puis du couple; en composant ces deux mouvements pour chaque point, on aura le mouvement résultant de l'action simultanée de toutes les forces.

Or la force résultante appliquée au centre de gravité peut être décomposée en forces égales appliquées à tous les éléments égaux de la masse du corps, et, par conséquent, elle donne une vitesse égale et parallèle à tous les points; il en résulte donc un mouvement commun de translation.

Quant au couple, il ne peut produire aucun déplacement du centre de gravité, puisque ses deux forces transportées à ce point se détruisent : le mouvement qu'il produit ne sera donc pas altéré en fixant invariablement le centre de gravité. Mais alors on peut introduire la force résultante, qui sera détruite par le point fixe, et l'on aura ainsi le système de toutes les forces données. D'où l'on voit que le mou-

vement de rotation que nous considérons, peut être regardé comme produit par les forces d'impulsion, agissant en leurs points d'application respectifs sur le corps dont nous aurons fixé le centre de gravité.

Nous pouvons donc énoncer cette première proposition :

Les vitesses que prennent instantanément les différents points d'un corps solide libre, peuvent être considérées comme les résultantes de celles qui se rapporteraient à deux mouvements distincts : l'un de translation, produit par les forces d'impulsion transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité; l'autre de rotation, produit par le système même des forces données agissant sur le corps dont le centre de gravité aurait été invariablement fixé.

Au moyen de cette proposition, le mouvement initial du corps est entièrement connu, puisque l'on sait déterminer celui d'un corps autour d'un point fixe. Quant à ce qu'il deviendra par la suite, nous savons que le centre de gravité se mouvra de la même manière que si toute la masse y était réunie, et que toutes les forces continues y fussent transportées, sans changer de grandeur et de direction. Mais ces forces, dépendant, en général, de la position des points, se trouvent, par cela même, dépendantes du mouvement de rotation; de sorte que l'on ne peut calculer séparément le mouvement du centre de gravité du corps, excepté dans le cas particulier où les forces auraient des directions et des intensités constantes, comme par exemple dans le cas de la pesanteur.

Au reste, on peut toujours établir la même proposition relativement aux forces continues, que relativement aux forces instantanées. En effet, considérons le corps à un instant quelconque : on peut supposer qu'il part du repos et qu'il est sollicité, d'un côté, par des forces instantanées qui donneraient à chaque point la vitesse qu'il a; d'un autre

côté, par les forces continues qui ne peuvent produire que des vitesses infiniment petites dans un intervalle de temps infiniment petit, et que l'on peut regarder comme des forces instantanées agissant au commencement de chaque intervalle de temps infiniment petit. Or, d'après le principe que nous avons rappelé, on peut déterminer séparément les vitesses produites par ces deux systèmes, et les composer ensuite. Le premier produira l'effet qui avait réellement lieu à l'instant considéré; le second est identique avec celui que nous avons discuté d'abord, et, par conséquent, il produira une vitesse de translation infiniment petite, due à toutes les forces continues transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, et un mouvement de rotation autour du centre de gravité rendu fixe, produit par toutes ces forces dans leur véritable position.

Ainsi donc, *si l'on conçoit par le centre de gravité du corps trois axes rectangulaires qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, leur point de rencontre se mouvra comme si toute la masse du corps y était réunie, et que toutes les forces instantanées ou continues y fussent appliquées; et le mouvement du corps, par rapport à ces axes, sera le même que si leur point de rencontre était invariablement fixé et que toutes les forces qui sollicitent les différents points dans le mouvement réel fussent appliquées de la même manière à ces mêmes points.*

124. *Application à l'ellipsoïde pesant.* — Supposons qu'un ellipsoïde homogène reçoive une impulsion dont la direction soit comprise dans le plan de deux de ses axes principaux relatifs à son centre de gravité, et soit ensuite abandonné à l'action de la pesanteur. Désignons par μv la quantité de mouvement qui mesure la force instantanée, par f la distance de cette force au centre, par b et c les deux demi-axes qui sont dans le plan de la force, et par a le troi-

sième; enfin par M la masse de l'ellipsoïde, et par V la vitesse initiale de son centre de gravité.

Le centre de gravité, qui est le centre de l'ellipsoïde, devant se mouvoir comme si la masse M y était concentrée, et fût sollicitée au premier instant par la force $\mu\nu$, puis par son poids, ce point prendra d'abord, dans une direction parallèle à celle de l'impulsion, une vitesse dont la valeur sera

$$V = \frac{\mu v}{M},$$

et il décrira une parabole tangente à cette direction initiale, et dont l'équation se calculera comme dans le cas d'un point libre. Pour connaître son mouvement par rapport à trois axes passant par son centre et parallèles à des directions fixes, il faut supposer que le centre soit fixe et que la force d'impulsion ainsi que la pesanteur agissent sur l'ellipsoïde ainsi assujetti. Mais on peut faire abstraction de la pesanteur, puisque le centre de gravité est fixe, et il suffit de déterminer la rotation produite par l'impulsion. Cette force étant située dans un plan perpendiculaire à une droite, qui est un axe principal relativement au point où elle est coupée par ce plan, et de plus ce point étant fixe, il s'ensuit que le mouvement aura lieu indéfiniment autour de cet axe. La vitesse angulaire ω s'obtiendra en divisant le moment $\mu\nu f$ de la force par le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe fixe; on aura donc

$$\omega = \frac{5\mu v f}{M(b^2 + c^2)},$$

ou, en introduisant la vitesse initiale V du centre de gravité,

$$\omega = \frac{5Vf}{b^2 + c^2}.$$

On voit donc que l'axe de rotation se transporte parallèlement à lui-même, et que le corps tourne uniformément autour de cette droite, que l'on pourra déterminer à chaque instant, puisqu'on connaît le mouvement du centre de gravité qui en est le milieu. On déterminera donc facilement la position de tous les points de l'ellipsoïde à un instant quelconque.

Dans le cas où il serait réduit à une sphère pleine ou creuse, homogène ou seulement formée de couches homogènes, tout diamètre serait un axe principal; le mouvement de rotation aurait lieu autour de celui qui serait perpendiculaire au plan mené par le centre et la direction de la force d'impulsion, et la direction de cet axe serait constamment parallèle à elle-même.

Le mouvement de rotation de cette sphère ne serait pas altéré si tous les points étaient attirés vers d'autres points par des forces proportionnelles aux masses et à une fonction de la distance, parce que la résultante des actions exercées par un point quelconque sur la masse entière de la sphère passerait par son centre de gravité. Mais si le corps était tant soit peu différent d'une sphère, il n'en serait plus ainsi, et c'est ce qui arrive par exemple dans le cas de la terre.

CHAPITRE XXII.

SUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS.

125. Lorsqu'un système de points est en équilibre, et qu'on le déplace infiniment peu, d'une manière quelconque, en l'abandonnant ensuite à l'action des mêmes forces, il arrive de deux choses l'une : ou les déplacements successifs de chaque point par rapport à sa position d'équilibre

restent toujours très-petits; ou ils peuvent acquérir, au bout d'un certain temps, des valeurs finies. On dit, dans le premier cas, que l'équilibre est stable; et, dans le second, qu'il est instable.

Cela posé, considérons l'équilibre d'un système de points assujettis à des liaisons quelconques indépendantes du temps, et telles que $\Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ soit la différentielle exacte d'une fonction $\varphi\,(x, y, z, x', \ldots)$.

Nous savons que, dans la position d'équilibre, cette fonction sera, en général, maximum ou minimum relativement à toutes les variables indépendantes. Or nous allons démontrer que, quand elle est maximum, l'équilibre est stable.

Supposons, en effet, un système de points en équilibre, sous l'action de forces X, Y, Z, X',..., telles, que l'expression

$$\Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

soit la différentielle totale d'une certaine fonction $\varphi\,(x, y, z, x', \ldots)$ en considérant les variables $x, y, z, x', \ldots$ comme indépendantes. En vertu du principe des vitesses virtuelles, la différentielle de la fonction φ sera nulle pour tous les déplacements infiniment petits du système, qui satisferont aux liaisons auxquelles il est assujetti. Supposons qu'alors cette fonction φ soit un maximum relativement à toutes les valeurs qu'elle prend dans ces divers déplacements. Désignons par a, b, c, a',... les valeurs de x, y, z, x',..., dans la position d'équilibre; déplaçons chacun des points de quantités extrêmement petites, et communiquons-leur des vitesses très-petites; il s'agit de démontrer que le dérangement du système restera toujours très-petit, et que, par conséquent, l'équilibre sera stable.

En effet, posons

$$x = a + h, \quad y = b + k, \quad z = c + l, \quad x' = a' + h', \text{ etc.},$$

et désignons par v_0, v'_0,... les vitesses très-petites que l'on a communiquées aux différents points; l'équation des forces vives deviendra

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 &= \varphi(a+h,\quad b+k,\quad c+l,\ldots) \\ &\quad - \varphi(a+h_0,\quad b+k_0,\quad c+l_0,\ldots), \end{aligned}\right.$$

h_0, k_0, l_0,... représentant les déplacements primitifs très-petits, estimés parallèlement aux axes.

Or, puisque la fonction $\varphi(x, y, z, x',\ldots)$ est maximum, lorsque x, y, z,... ont les valeurs a, b, c,..., les termes du premier degré en h, k, l,... disparaissent dans le développement de $\varphi(a+h, b+k, c+l,\ldots)$; et les termes du second ordre, changés de signe, peuvent se mettre sous la forme d'une somme de carrés de quantités dont chaque terme renferme, au premier degré, l'une des quantités h, k, l,..., et qui sont en nombre égal à celui des variables indépendantes. Si l'on désigne ces diverses quantités par s, s', s'',..., et par R l'ensemble des termes de degrés supérieurs au second, on aura

$$\begin{aligned} &\varphi(a+h,\quad b+k,\quad c+l,\ldots) \\ &\qquad = \varphi(a,\ b,\ c,\ldots) - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) + \mathrm{R}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} &\varphi(a+h_0,\quad b+k_0,\quad c+l_0,\ldots) \\ &\qquad = \varphi(a,\ b,\ c,\ldots) - (s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \ldots) + \mathrm{R}_0. \end{aligned}$$

L'équation (1) devient donc

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 &= -(s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) \\ &\quad + (s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \ldots) + \mathrm{R} - \mathrm{R}_0; \end{aligned}$$

ou, en représentant par c la quantité très-petite

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \ldots - \mathrm{R}_0,$$

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = c - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) + \mathrm{R}.$$

Les quantités h, k, l, h',... ne sont pas toutes indépendantes, et l'on pourrait en éliminer un certain nombre au moyen des équations qui expriment les liaisons du système. Celles qui resteraient entreraient au premier degré dans les divers termes des quantités s, s', s'',... dont le nombre est le même que celui de ces variables indépendantes. Il suit de là que si ces dernières ont des valeurs très-petites, il en sera de même de s, s', s'',..., et réciproquement. Il suffit donc de démontrer que s, s', s'',.. resteront constamment très-petites pour qu'il en résulte que les déplacements des points du système restent eux-mêmes très-petits, et que, par conséquent, l'équilibre est stable.

Or, le premier membre de l'équation (2) étant essentiellement positif, il en sera constamment de même du second; et il est facile d'en conclure que chacune des quantités s^2, s'^2,... restera toujours inférieure à c. En effet, d'après la valeur de c, chacune des quantités s^2, s'^2,... est d'abord moindre que c; elles varient ensuite d'une manière continue. Supposons qu'il puisse arriver alors que l'une d'elles, par exemple s^2, devienne égale à c, et ce sera la plus grande de toutes; elle sera encore très-petite, et il en sera de même, à plus forte raison, de toutes les autres. Donc h, k, l,... seront aussi très-petits, et la quantité R sera incomparablement moindre que chacune des quantités s^2, s'^2,.... Donc l'hypothèse $s^2 = c$ conduirait à ce résultat absurde, que le second membre de l'équation (2) serait négatif. Les quantités s, s', s'',... restant donc toujours inférieures à $\sqrt{c}$, et, par conséquent, très-petites, il en sera de même des déplacements h, k, l,..., et l'*équilibre sera stable.*

Lorsque la fonction $\varphi(x, y, z, x',...)$ est un minimum, on ne peut faire des raisonnements analogues pour démontrer l'instabilité de l'équilibre, et il faut examiner spécialement chaque cas particulier.

CHAPITRE XXIII.

CALCUL DE L'EFFET DES MACHINES.

126. Les machines ne sont généralement utiles que lorsqu'elles sont en mouvement, et, dans ce cas, elles ont pour objet de surmonter certaines résistances et de faire mouvoir leurs points d'application de telle sorte, que leurs déplacements, estimés suivant la direction de ces forces qu'il faut vaincre, soient en sens contraire de leur action; on donne à ces forces le nom de *forces résistantes*. Celles que l'on emploie pour produire le mouvement, se nomment *forces mouvantes*.

Le plus ordinairement, une machine n'est susceptible de prendre que deux mouvements différents, opposés l'un à l'autre, et dans lesquels la position d'un seul point détermine celle de tous les autres. Une seule équation suffit donc pour déterminer la loi de ce mouvement, dès qu'on connaît le sens dans lequel il a lieu; et la plus commode à employer est celle des forces vives. Cette équation est

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \int \Sigma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

les sommes Σ du premier membre s'étendant à tous les points du système, et la somme Σ du second se rapportant à toutes les forces, soit mouvantes, soit résistantes, qui y sont appliquées. L'intégrale du second membre est prise entre deux limites quelconques, et v_0 et v sont les vitesses du point dont la masse est m, relativement à ces limites.

Les forces dont les composantes sont X, Y, Z se partagent naturellement en deux classes. Désignons par P l'une quelconque des forces mouvantes, et par dp le déplacement infiniment petit de son point d'application, estimé dans le sens de cette force; $\Sigma P\,dp$ sera la partie de

$$\Sigma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

correspondante aux forces mouvantes. Soient de même Q l'une quelconque des forces résistantes, et dq le déplacement de son point d'application estimé dans le sens de cette force et abstraction faite de tout signe ; la partie correspondante aux forces résistantes sera $-\Sigma Q\,dq$, et l'équation (1) pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \int \Sigma P\,dp - \int \Sigma Q\,dq.$$

127. Toute force peut être remplacée par un poids suspendu par un fil dont une extrémité sera fixée au point d'application de la force, et dont la direction, à partir de ce point, coïncidera avec celle de cette force, par le moyen d'une poulie de renvoi. Si l'on fait cette substitution à la force P, lorsque la machine se déplacera infiniment peu, le poids égal à P descendra de la quantité dp qui désigne la projection du déplacement de l'extrémité du fil sur la direction de ce fil. Si l'on agit de même pour une quelconque des forces Q, dq exprimera la quantité dont s'élèvera le poids égal à Q pendant que le poids P s'est abaissé de dp.

Ainsi, en supposant d'abord toutes les forces constantes, l'équation (2) exprime que l'accroissement de la demi-somme des forces vives du système entre deux époques quelconques est égale à la somme des produits des premiers poids par les hauteurs respectives dont ils se sont abaissés, moins la somme des produits des seconds poids par les hauteurs dont ils se sont élevés.

Nous désignerons, avec M. Coriolis, par *quantité de travail* le produit d'un poids par la hauteur dont il a été élevé ou abaissé, et, généralement, le produit d'une force quelconque par la projection du déplacement de son point d'application sur la direction de cette force. Si la force varie d'intensité, on décompose le mouvement en parties infiniment petites ; les quantités de travail élémentaires

qui leur correspondent dépendent de la loi que suit la variation de la force, et l'intégrale qui en exprime la somme est la quantité de travail relative au déplacement du point d'application de cette force.

Si l'on désigne par *travail moteur* celui qui se rapporte aux forces mouvantes, et par *travail résistant* celui qui se rapporte aux forces résistantes, l'équation (2) exprime que, quand le système passe d'une position à une autre, l'accroissement de la demi-somme des forces vives est égal à l'excès du travail moteur sur le travail résistant.

128. Si l'on considère la machine à partir de l'instant où elle était en repos, on a $v_0 = 0$, et l'équation (2) devient

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \int \Sigma P\,dp - \int \Sigma Q\,dq;$$

le second membre est donc toujours positif, et, par conséquent, le travail moteur surpasse toujours le travail résistant. Ils seront égaux lorsque la machine reviendra au repos. Si le mouvement de la machine devient uniforme, ce qui est ordinairement le plus avantageux, et qu'on ne le considère qu'après que l'uniformité est établie, le premier membre de l'équation (2) est nul, et, par conséquent, le second l'est aussi : d'où l'on conclut que, dans un intervalle de temps quelconque, le travail moteur est égal au travail résistant. Mais, comme ce dernier se compose du travail que l'on avait en vue de produire et qu'on nomme le *travail utile,* plus le travail correspondant aux frottements, aux résistances des milieux, à la communication du mouvement aux corps environnants, etc., il en résulte que dans toute machine on est obligé de dépenser plus de travail que l'on n'en produit. La meilleure n'est que celle où l'on en perd le moins, et l'avantage des machines en mouvement n'est que de transformer le travail, mais non de l'augmenter.

Lorsque les vitesses sont devenues constantes, il doit y avoir équilibre entre toutes les forces, et, en effet, l'équation

$$\int \Sigma P\,dp - \int \Sigma Q\,dq = 0$$

donne, en la différentiant,

$$\Sigma P\,dp - \Sigma Q\,dq = 0,$$

équation qui sera satisfaite si le système, quel qu'il soit, est en équilibre; et qui en est la condition suffisante, s'il est à liaison complète.

129. Lorsqu'on veut évaluer le travail correspondant au frottement d'un corps en mouvement, et que le contact n'a pas lieu en un point constant de ce corps, il ne faut pas regarder la force de frottement comme appliquée au point où le contact s'opère, et prendre la distance de deux points de contact consécutifs comme l'espace parcouru par le point d'application de la force. Il faut, pour faire usage du principe des forces vives, que les forces soient appliquées aux mêmes points matériels pendant ce temps très-court relatif aux déplacements dx, dy, dz. Or, la force de frottement étant tangente au corps, peut être considérée comme appliquée au même point de ce corps, pendant un temps très-court, en négligeant une distance infiniment petite du second ordre. On devra donc prendre, dans l'évaluation du travail élémentaire dû à un frottement, le produit de la force de frottement par la projection du déplacement, dans l'espace, du point du corps qui était au contact à l'instant que l'on considère.

130. S'il y a des chocs entre certaines parties de la machine, que nous supposerons que l'on puisse regarder comme sensiblement dénuées d'élasticité, il y aura instantanément une perte de force vive, représentée par la somme

des forces vives dues aux vitesses perdues par tous les points du système. Si l'on représente par u cette vitesse pour la masse quelconque m, les intégrales du second membre de l'équation (2) n'ayant pas varié sensiblement pendant la durée du choc, on aura, en désignant par v la vitesse de la masse m après le choc,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 = \int \Sigma \mathrm{P}\,dp - \int \Sigma \mathrm{Q}\,dq;$$

de sorte que, pour maintenir les vitesses v à des valeurs déterminées, on sera obligé de dépenser une quantité de travail plus grande de $\frac{1}{2}\Sigma mu^2$: il est donc utile d'éviter les chocs autant que possible.

131. Lorsque le mouvement de la machine n'est pas uniforme, il faut du moins qu'il soit périodique. Dans ce cas, si les intégrales qui entrent dans l'équation (2) se rapportent à un nombre entier de périodes, on a $v = v_0$, et, par conséquent, le travail moteur est égal au travail résistant, comme si le mouvement était uniforme; et, réciproquement, si ces deux quantités de travail sont les mêmes dans l'intervalle qui s'écoule entre deux positions identiques quelconques du système, les vitesses redeviennent les mêmes après cet intervalle, et le mouvement est périodique. Mais il ne suffit pas d'obtenir une même quantité de travail, il est presque toujours très-important que ce travail soit produit uniformément. Il est presque impossible de parvenir à une uniformité rigoureuse, mais on peut rendre à peu près insensibles les changements de vitesse pendant le cours d'une période. Le moyen qu'on emploie le plus ordinairement consiste à introduire dans le système une masse assez considérable, à laquelle on donne le nom de *volant*, et dont l'effet est de diminuer les variations de vitesse correspondantes aux variations de la différence entre le travail moteur et le travail résistant. Pour que le volant

charge moins les supports, il est utile qu'il ait la moindre masse possible, et pour cela on lui donne la forme d'une roue dont la masse est presque tout entière à la circonférence. Si l'on désigne par ω sa vitesse angulaire, la somme des forces vives de ses points pourra être représentée par $\mu\omega^2$, μ étant une constante dont il sera facile de déterminer la valeur, de quelque manière que soit répartie la masse du volant. Soit Σmv^2 la somme des forces vives de toutes les autres parties de la machine, et désignons par ω' et v' les valeurs de ω et v à une même époque; l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v'^2) + \frac{\mu}{2}(\omega^2 - \omega'^2) = \int(\Sigma P dp - \Sigma Q dq).$$

Prenons pour les deux limites des époques telles qu'il y ait le plus de différence possible entre $\int\Sigma P dp$ et $\int\Sigma Q dq$; il est facile de voir que ce sont celles où les forces seraient en équilibre sur la machine : car, à ces deux époques, les éléments de l'intégrale qui forme le second membre changent de signe. Il en résulte que ces époques sont aussi celles du maximum et du minimum des vitesses. Or, plus μ sera grand, moins il faudra que ω et ω' soient différents pour que le premier membre devienne égal au second, et l'on peut, dans chaque cas, déterminer le volant de manière que les changements de vitesse soient compris dans des limites suffisamment petites.

CHAPITRE XXIV.

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION.

132. Ce principe n'a lieu que dans les systèmes pour lesquels l'équation des forces vives subsiste. Il consiste en ce que si, pour chaque point du système, on intègre entre deux époques arbitraires le produit de sa quantité de mouvement

par l'élément de la courbe qu'il décrit, la somme de toutes ces intégrales est un minimum; c'est-à-dire qu'elle est moindre que si, par de nouvelles liaisons, on assujettissait ces points à suivre de nouvelles courbes, entre les deux mêmes positions extrêmes que l'on considère, et sous l'influence des mêmes forces.

Pour le démontrer, il faut faire voir que la variation de cette somme est nulle quand on fait varier infiniment peu les points de ces courbes en leur laissant les mêmes extrémités; car il est évident, par la nature de cette somme, qu'en général elle ne peut avoir une valeur maximum, et que, par conséquent, en exceptant des cas très-particuliers, elle aura une valeur minimum.

Or on a

$$\delta\int\Sigma mvds = \int\Sigma m\,\delta\,(vds) = \int\Sigma m\,(\delta v.ds + v\,\delta ds).$$

Pour calculer la première partie, remplaçons ds par vdt, dt se rapportant au mouvement qui a réellement lieu; nous aurons

$$\delta v.ds = v\,\delta v dt = \tfrac{1}{2}\,dt\,\delta.v^2,$$

et, par suite,

$$\Sigma m\,\delta v.ds = \tfrac{1}{2}\,dt\,\Sigma\, m\,\delta.v^2.$$

Mais on a, en désignant par C une quantité constante,

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\, mv^2 = \varphi\,(x, y, z, x', \ldots) + \mathrm{C},$$

et la forme du second membre sera la même pour tous les mouvements que l'on considère, puisque les forces restent les mêmes. Si donc on prend la variation des deux membres, on aura

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m\,\delta.v^2 &= \frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \ldots\\ &= \Sigma\,(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z);\end{aligned}$$

et, d'après l'équation générale du mouvement, cette der-

nière expression est égale à

$$\Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) dt.$$

On aura donc

$$\Sigma m\,\delta v.ds = \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) dt.$$

Pour calculer la seconde partie, nous observerons que l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne

$$\delta\,ds = \frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + \frac{dy}{ds}\,\delta\,dy + \frac{dz}{ds}\,\delta\,dz,$$

et, par suite,

$$v\,\delta\,ds = \frac{dx}{dt}\,d\,\delta\,x + \frac{dy}{dt}\,d\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,d\,\delta\,z.$$

Donc

$$\Sigma mv\,\delta\,ds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\,d\,\delta\,x + \frac{dy}{dt}\,d\,\delta\,y + \frac{dz}{dt}\,d\,\delta\,z\right);$$

et, en réunissant les deux parties de la variation de $\Sigma mvds$, il vient

$$\delta\,\Sigma\,mvds = \Sigma\,md \left(\frac{dx}{dt}\,\delta\,x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta\,z\right).$$

Si maintenant on intègre les deux membres, on aura

$$\delta \int \Sigma\,m\,vds = \Sigma\,m \left(\frac{dx}{dt}\,\delta\,x + \frac{dy}{dt}\,\delta\,y + \frac{dz}{dt}\,\delta\,z\right) + C';$$

mais, aux deux limites de l'intégrale, les variations δx, δy, δz sont nulles, puisque les extrémités des courbes décrites restent les mêmes; donc le second membre est nul, et l'on a

$$\delta \int \Sigma\,m\,vds = 0,$$

comme il fallait le démontrer.

D'où l'on conclut que l'intégrale

$$\int \Sigma\, m\, v ds, \quad \text{ou} \quad \int \Sigma\, m\, v^2 dt$$

est un minimum dans le mouvement du système.

133. Si les points ne sont soumis à l'action d'aucune force, on a

$$\Sigma\, m\, v^2 = k,$$

k étant constant.

Donc

$$\int \Sigma\, m\, v^2 dt = kt + C_1 = k(t - t_1),$$

t et t_1 étant les valeurs du temps aux deux limites; et, comme l'intégrale est un minimum, il s'ensuit qu'il en est de même de $t - t_1$, et que, par conséquent, le système passe d'une position à une autre dans moins de temps que si l'on introduisait de nouvelles liaisons quelconques.

Si l'on considère un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe, sans être soumis à l'action d'aucune force, sa vitesse est constante; et le temps qu'il met à passer d'un point à un autre étant minimum, il s'ensuit que la longueur de la ligne parcourue est aussi minimum, comme nous l'avons déjà démontré d'une autre manière.

HYDROSTATIQUE.

---

134. On désigne sous le nom de fluide un assemblage de points matériels en nombre considérable, situés à des distances assez petites les uns des autres pour qu'on puisse, sans erreur sensible, regarder comme continue la matière qui les compose, excepté dans les cas où l'on considère des actions qui varient sensiblement d'une molécule à l'autre. On suppose, de plus, que tous ces points puissent être déplacés par le moindre effort, et entraînés à des distances quelconques les uns des autres. Cette hypothèse d'une parfaite mobilité n'est pas entièrement exacte, et conduirait quelquefois à des résultats peu conformes à l'expérience, quand il s'agira du mouvement; mais, dans l'équilibre, on peut la regarder comme exacte, sans qu'il en résulte aucune erreur sensible.

Les fluides se divisent en *liquides*, et en *gaz* ou fluides *aériformes*. Les premiers sont aussi appelés fluides *incompressibles*, parce que l'on a cru longtemps qu'il était impossible de diminuer leur volume par la pression; mais on a reconnu, depuis, qu'ils étaient réellement compressibles à un très-faible degré.

La partie de la Statique qui s'occupe de l'équilibre des fluides de toute espèce se nomme *Hydrostatique*.

135. Lorsqu'un liquide, renfermé dans un vase ouvert ou fermé de toutes parts, est en équilibre sous l'action de forces quelconques, il exerce une pression sur les parois du vase qui l'arrêtent. Cette pression peut varier d'un point à

un autre; pour la définir avec précision, on considère une étendue infiniment petite de la paroi, et l'on suppose que la force qui s'exerce sur elle se reproduise avec la même intensité et dans la même direction sur tous les éléments d'une surface plane égale à l'unité : la force résultante est ce que l'on appelle la pression du liquide au point de la paroi que l'on considère. On voit que ce n'est autre chose que la limite du rapport de la force produite sur l'élément infiniment petit, à l'aire de cet élément.

On peut regarder comme un résultat de l'expérience, ou comme une conséquence de la disposition uniforme des molécules du fluide les unes autour des autres, que la direction de la pression est toujours perpendiculaire à l'élément de surface sur lequel elle s'exerce; et comme l'action et la réaction sont toujours égales, il existe en sens contraire une pression égale dans l'étendue du même élément. Ce fait peut encore être considéré comme rentrant dans cet autre plus général, que des corps en contact n'exercent l'un sur l'autre que des actions normales, quand leurs surfaces n'ont aucune adhérence ni frottement. Car, lors même qu'un liquide serait susceptible de s'attacher à la paroi, on pourrait regarder la couche extrêmement mince qui y adhérerait comme faisant partie de la paroi, et le reste du liquide comme pouvant librement glisser sur elle.

Nous admettrons, comme résultat de l'expérience, une autre propriété fondamentale des fluides, qui consiste en ce que, si une certaine quantité de fluide, en équilibre sous l'action de forces quelconques, remplit exactement un vase fermé de toutes parts, et qu'au moyen d'un piston, on exerce sur une portion de la surface de ce fluide une pression quelconque, elle est transmise avec la même intensité sur toute portion équivalente de la surface des parois; de sorte que sur deux parties inégales, la pression est en raison directe de leurs aires, pourvu que ces surfaces soient planes; dans

le cas de surfaces courbes, il n'en serait ainsi que pour des portions infiniment petites.

Ces propositions s'étendent aux pressions intérieures aussi bien qu'à celles qui s'exercent sur les parois. Car l'équilibre ne serait pas troublé, et les efforts resteraient les mêmes, si l'on supposait que, dans une partie quelconque du liquide, tous les points fussent liés invariablement et constituassent un corps solide. On peut donc, en un point quelconque de l'intérieur et dans une direction quelconque, supposer une paroi solide; par conséquent, la pression exercée sur un élément plan de cette paroi lui sera normale, quelle qu'en soit la cause. De plus, si cette pression provient d'une autre pression exercée à la surface du fluide renfermé dans un vase plein, elle sera égale à la première pour une étendue égale en surface. On conclut de là que les propositions admises pour les pressions des fluides sur les parois des vases qui les renferment, s'appliquent aux pressions exercées dans leur intérieur sur toute portion de surface que l'on y voudra considérer.

Enfin, on déduira facilement de là qu'en un point quelconque d'un fluide en équilibre, la pression est la même, quelle que soit la direction de l'élément de surface sur lequel elle s'exerce; car, si l'on conçoit autour d'un quelconque de ses points un polyèdre infiniment petit formé par le liquide, et qu'on le regarde d'abord comme solidifié, il est en équilibre sous l'influence des pressions exercées à sa surface et des forces qui sollicitent ses points intérieurs proportionnellement à leurs masses. Ces dernières peuvent être considérées comme parallèles, et ont, par conséquent, une résultante dont l'intensité sera proportionnelle à la masse du polyèdre qui est un infiniment petit du troisième ordre; et comme ses faces sont des infiniment petits du second ordre, et qu'il en est de même des pressions qu'elles supportent, l'équilibre pourra être considéré comme existant sensiblement entre ces pres-

sions seulement, sans tenir aucun compte de la force qui agit sur la masse de ce polyèdre. Si maintenant on rend au polyèdre sa fluidité primitive, et qu'on solidifie le reste du liquide, qui devient alors comme un vase polyédrique fermé de toutes parts et rempli de liquide, rien ne sera changé dans les actions mutuelles des molécules, et par conséquent dans les pressions qu'elles produisent. Or, il résulte de la propriété générale des fluides, que les pressions sur les parois sont égales pour des éléments égaux en surface, quelle que soit leur direction; et comme tous ces éléments de surface sont de plus en plus près de passer par le point considéré dans le liquide, on en doit conclure que, quelle que soit la direction d'un élément plan, passant par un point quelconque d'un fluide en équilibre, la pression exercée sur lui et rapportée à l'unité de surface est toujours la même.

136. Si l'on suppose un fluide incompressible renfermé dans un vase immobile et soumis à des pressions produites sur sa surface par un nombre quelconque de pistons, le principe des forces virtuelles aura lieu dans le cas de l'équilibre de ces forces, en regardant comme conditions du système que le fluide reste continu, de volume constant, et toujours en contact avec les bases des pistons. Soient, en effet, a, a', a'', etc., les aires de ces bases; les pressions produites par ces pistons, rapportées à l'unité de surface, seront égales; et si l'on désigne leur valeur par p, les forces appliquées à la surface du liquide seront respectivement ap, $a'p$, $a''p$, etc. Soient δp, $\delta p'$, $\delta p''$ les vitesses virtuelles des points d'application de ces forces, estimées suivant leurs directions; elles seront assujetties à la condition que le volume du liquide n'ait pas varié par ce déplacement, et qu'il ne se soit opéré aucun vide; d'où résulte

$$a\,\delta p + a'\,\delta p' + a''\,\delta p'' + \ldots = 0,$$

et, par suite,

$$ap\,\delta p + a'p\,\delta p' + a''p\,\delta p'' + \ldots = 0,$$

ce qui prouve que la somme des moments virtuels des forces est égale à zéro.

Équations générales de l'équilibre des fluides.

137. Soient X, Y, Z les composantes de la force, rapportée à l'unité de masse, qui agit au point dont les coordonnées sont x, y, z; désignons par ρ la densité du liquide, et par p la pression en ce point, rapportée à l'unité de surface : p et ρ sont des fonctions de x, y, z, que l'on se propose de déterminer quand l'équilibre est établi.

Si au point dont les coordonnées sont x, y, z, on conçoit un parallélipipède dont les arêtes soient parallèles aux axes et respectivement égales aux différentielles dx, dy, dz, sa masse dm sera égale à $\rho\,dx\,dy\,dz$ et sera sollicitée par les trois forces

$$\rho\,X\,dx\,dy\,dz,\quad \rho\,Y\,dx\,dy\,dz,\quad \rho\,Z\,dx\,dy\,dz\,;$$

ses six faces seront sollicitées par des forces parallèles aux axes, et dirigées vers l'intérieur de son volume. Si l'on considère d'abord les deux faces parallèles au plan des x et y, dont l'un passe au point dont les coordonnées sont x, y, z, et l'autre au point qui a pour coordonnées $x, y, z + dz$, la pression exercée sur la première est $p\,dx\,dy$; et sur la seconde elle est

$$-\,dx\,dy\left(p + \frac{dp}{dz}dz\right),$$

$\frac{dp}{dz}$ étant la dérivée partielle de p par rapport à z. Chacune d'elles peut être regardée comme constante dans toute l'étendue de la face correspondante, sans qu'il en résulte d'erreur

dans les équations, considérées à la limite. Les deux forces auxquelles se réduisent les actions exercées respectivement sur ces deux faces sont donc des forces directement opposées, et elles se composent en une seule, parallèle à l'axe des z et égale à

$$-\,dx\,dy\,dz\,\frac{dp}{dz}.$$

De même, les pressions parallèles à l'axe des y et à l'axe des x se réduisent aux forces

$$-\,dx\,dy\,dz\,\frac{dp}{dy},\quad -\,dx\,dy\,dz\,\frac{dp}{dx}.$$

Ces trois forces peuvent être considérées comme agissant au centre du parallélipipède, ainsi que la résultante des forces appliquées à tous les points de sa masse, puisque ces forces doivent être regardées comme constantes de grandeur et de direction, et que la densité peut être supposée la même en tous les points du parallélipipède. Il est donc nécessaire et suffisant, pour son équilibre, que les forces parallèles à chacun des axes soient en équilibre entre elles, ce qui donne les trois équations

$$(1)\qquad \frac{dp}{dx}=\rho X,\quad \frac{dp}{dy}=\rho Y,\quad \frac{dp}{dz}=\rho Z.$$

Multipliant ces équations respectivement par dx, dy, dz, et les ajoutant, il vient

$$(2)\qquad dp=\rho\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz);$$

ce qui apprend que si le fluide est en équilibre, l'expression

$$\rho\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

est la différentielle totale d'une fonction de x, y, z, et que cette fonction donne nécessairement l'expression de la pression, à une constante arbitraire près.

Désignons cette fonction par $F(x, y, z)$, l'équation (2) donnera

$$(3) \qquad p = F(x, y, z) + C,$$

C étant une constante arbitraire que l'on pourra déterminer si l'on connaît la pression en un point donné. Si le fluide n'est pas renfermé dans un vase fermé de toutes parts et exactement rempli, il sera nécessaire qu'à la partie libre de la surface il y ait une pression extérieure dont la valeur soit donnée par l'équation (3), et qui soit dirigée en chaque point vers l'intérieur du liquide.

La pression en un point n'étant pas produite par la force extérieure, agissant dans le voisinage de ce point seulement, peut être nulle aux points où la force est très-grande. C'est ce qui a lieu, par exemple, à la surface libre d'un liquide pesant, dans le vide.

138. *Surfaces de niveau.* — Dans un fluide en équilibre, on appelle *surface de niveau* toute surface telle, que la résultante des forces qui agissent sur le liquide lui soit normale en chacun de ses points.

Si donc on désigne par dx, dy, dz les accroissements infiniment petits que prennent les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une de ces surfaces quand on passe à un autre point de cette même surface, on aura la condition

$$(4) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

c'est l'équation différentielle de toutes les surfaces de niveau, et ρ est le facteur propre à la rendre intégrable

Il en résulte, en vertu de l'équation (2), que pour tous les points d'une même surface de niveau, on a

$$dp = 0,$$

et que, par conséquent, la pression y est constante. Cette

propriété remarquable pourrait servir de définition à ces surfaces, et celle qui est exprimée par l'équation (4) en serait une conséquence immédiate.

L'équation finie des surfaces de niveau sera, en désignant par c une constante arbitraire,

$$F(x, y, z) = c,$$

$F(x, y, z)$ étant toujours la fonction dont la différentielle est

$$\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Si la constante c prend successivement toutes les valeurs possibles, on obtiendra toutes les surfaces de niveau. Ces surfaces remarquables ne peuvent se rencontrer si des valeurs finies de x, y, z donnent toujours à la fonction $F(x, y, z)$ des valeurs finies et déterminées; car alors on ne saurait avoir en même temps

$$F(x, y, z) = c \quad \text{et} \quad F(x, y, z) = c',$$

c et c' étant différents.

S'il en était autrement, les conséquences précédentes ne subsisteraient plus. Aux points où deux surfaces de niveau se rencontreraient, la pression serait indéterminée, et, par conséquent, on ne pourrait plus dire que la pression serait constante dans toute l'étendue d'une même surface de niveau. Nous ne considérerons pas les cas exceptionnels où ces circonstances se rencontreraient.

Si la surface libre du liquide est soumise à une pression constante en tous ses points, elle est elle-même une surface de niveau.

139. Si $X\,dx + Y\,dy + Z\,dx$ est la différentielle totale d'une fonction φ de x, y, z, comme cela a lieu, par exemple, quand les forces données sont dirigées vers des centres fixes et ne dépendent que de la distance à ces centres, l'équa-

tion (2) peut se mettre sous la forme

$$(5) \qquad dp = \rho\, d\varphi.$$

Le premier membre de cette équation est la différentielle d'une fonction des variables indépendantes x, y, z; il en est de même de $d\varphi$: donc, pour que le second membre soit identique au premier, il est nécessaire que ρ soit une fonction de φ; mais cette fonction peut avoir une forme quelconque.

Ainsi la densité sera constante en même temps que φ, c'est-à-dire pour tous les points d'une même surface de niveau; et ces surfaces partagent le fluide en couches où la pression et la densité ne varient pas.

140. Dans le cas des fluides compressibles, la densité dépend de la pression. Soit alors $\rho = f(p)$, l'équation (5) devient

$$d\varphi = \frac{dp}{f(p)}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \int \frac{dp}{f(p)}.$$

La constante se déterminera par la valeur donnée de la pression en un point connu; on pourra tirer de là p, et, par suite, ρ en fonction de φ, et l'on connaîtra la densité et la pression relatives à une surface quelconque de niveau.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un gaz; on aura, d'après la loi de Mariotte,

$$p = k\rho,$$

k étant dépendant de la température, que nous regarderons d'abord comme constante. L'équation (5) donnera

$$(6) \qquad \frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{k},$$

d'où

$$\mathrm{l}.\frac{p}{\mathrm{C}}=\frac{\varphi}{k},$$

C étant une constante que l'on déterminera par la valeur de p correspondante à une valeur connue de φ.

La dernière équation peut se mettre sous la forme

$$p=\mathrm{C}e^{\frac{\varphi}{k}},$$

et l'on aura, par suite,

$$\rho=\frac{\mathrm{C}}{k}e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Si la température n'est pas constante, k sera variable, et lorsque l'équilibre sera établi, l'équation (6) apprend que k ne pourra être qu'une fonction de φ, et que, par conséquent, la température sera constante pour tous les points d'une même surface de niveau. La pression et la densité seront déterminées par les formules

$$p=\mathrm{C}e^{\int\frac{d\varphi}{k}},\quad \rho=\frac{\mathrm{C}}{k}e^{\int\frac{d\varphi}{k}}.$$

En considérant la terre comme sphérique, et en faisant abstraction de son mouvement de rotation, la force appliquée aux molécules de l'air est dirigée vers le centre, et, par conséquent, les surfaces de niveau seront des sphères concentriques avec la terre. L'équilibre de l'atmosphère exigerait donc que la température fût partout la même à égale distance de la surface de la terre, ce qui ne saurait être à cause de la présence du soleil; d'où il suit que cet équilibre ne saurait avoir lieu.

141. Au lieu de considérer un liquide en équilibre, à l'état de repos, ou animé d'une vitesse commune à tous ses

points, on pourrait supposer qu'il tourne uniformément autour d'un axe fixe, et chercher les conditions pour que tous ses points ne se déplacent pas les uns par rapport aux autres. Il suffira pour cela, d'après le principe de d'Alembert, qu'il y ait équilibre en chaque point entre les forces données et les forces égales et opposées à celles qui produiraient sur chaque point libre le mouvement qu'il a réellement, c'est-à-dire aux forces centripètes.

L'équilibre a donc lieu entre les forces données et les forces centrifuges considérées comme appliquées aux molécules elles-mêmes. Si la vitesse angulaire est désignée par ω, les composantes de la force centrifuge seront $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, parallèlement aux axes des x et des y, et la troisième sera nulle si l'on prend l'axe de rotation pour axe des z. On aura donc, pour déterminer la pression,

$$(7) \qquad dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy).$$

Les termes introduits par la force centrifuge devront donc former une différentielle exacte conjointement avec

$$\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Les surfaces de niveau auront pour équation commune

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi = c,$$

en désignant par φ la fonction de x, y, z dont le premier membre multiplié par ρ est la différentielle, et par c une constante arbitraire.

Si la surface libre du liquide, homogène ou hétérogène, est soumise à une pression constante, elle sera elle-même une surface de niveau, et son équation sera comprise dans l'équation générale $\varphi = c$. Si donc on connaît le volume total du liquide et la forme du vase dans lequel il est renfermé, la valeur de la constante c se trouvera déterminée,

comme nous allons le voir dans quelques cas particuliers.

142. Supposons un liquide homogène pesant, dont la surface libre soit soumise à une pression constante P, et qui se trouve renfermé dans un cylindre vertical dont le rayon de la base est a, dans lequel il s'élève à une hauteur h, à l'état de repos. Prenons pour axe des z l'axe de ce cylindre dans le sens opposé à la pesanteur.

On aura alors

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g,$$

et l'équation (7) devient

$$dp = -g\rho\, dz + \rho\omega^2 (x dx + y dy).$$

L'équation générale des surfaces de niveau sera

$$-g dz + \omega^2 (x dx + y dy) = 0,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - c),$$

c étant une constante arbitraire.

Cette équation représente des paraboloïdes de révolution autour de l'axe des z, et c est la hauteur de leur sommet au-dessus du plan de la base.

La surface libre, étant soumise à une pression constante, est une surface de niveau, et son équation s'obtiendra en donnant à c une valeur particulière convenable dans la dernière équation. Cette valeur s'obtiendra en calculant le volume du liquide terminé à la surface qu'elle représente, et égalant le résultat à $\pi a^2 h$. On trouve pour son expression

$$\pi a^2 z - \frac{\pi g}{\omega^2}(z - c)^2,$$

z étant la valeur correspondante au point où la parabole

génératrice rencontre le cylindre, valeur qui est égale à

$$c + \frac{a^2\omega^2}{2g}.$$

On aura donc, pour déterminer c, l'équation

$$\pi a^2 h = \pi a^2 c + \frac{\pi a^4 \omega^2}{4g},$$

d'où l'on tire

$$c = h - \frac{a^2\omega^2}{4g}.$$

L'équation de la surface qui termine le liquide est donc

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z + \frac{a^2\omega^2}{4g} - h\right).$$

Il reste maintenant à déterminer la pression en un point quelconque. Or, en intégrant la valeur de dp, on trouve, en désignant par c une constante arbitraire,

$$p = -g\rho z + \rho\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + c',$$

et l'on déterminera c' en exprimant qu'à la surface on a $p = P$; on trouve ainsi

$$P = \frac{a^2\omega^2\rho}{4} - g\rho h + c',$$

d'où

$$c' = P - \frac{a^2\omega^2\rho}{4} + g\rho h,$$

ce qui donne la solution complète de la question.

On peut observer que, lorsque le liquide part du repos et parvient à sa position d'équilibre dans le mouvement de rotation, le point de la surface libre qui était sur l'axe s'est abaissé autant que les points en contact avec le cylindre se sont élevés. En effet, la hauteur c du sommet du parabo-

loïde qui termine le liquide est égale à $h - \frac{a^2\omega^2}{4g}$, et la hauteur des points du paraboloïde qui sont sur la surface du cylindre, est

$$c + \frac{a^2\omega^2}{2g}, \quad \text{ou} \quad h + \frac{a^2\omega^2}{4g}.$$

Or, ces deux hauteurs diffèrent de la hauteur primitive h, de la même quantité $\frac{a^2\omega^2}{4g}$.

143. Proposons-nous maintenant le cas où les molécules du liquide renfermé dans le vase seraient sollicitées par une force dirigée vers un point fixe et proportionnelle à la distance à ce point.

Si nous désignons par μ la valeur de cette force à l'unité de distance, et que nous prenions pour origine le point fixe vers lequel elle est dirigée, ses composantes seront

$$-\mu x, \quad -\mu y, \quad -\mu z.$$

Les composantes de la force centrifuge seront, en désignant par ω la vitesse angulaire,

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y;$$

l'équation différentielle des surfaces de niveau sera donc

$$(\omega^2 - \mu)(xdx + ydy) - \mu z dz = 0,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu z^2}{\mu - \omega^2} = c,$$

c désignant une constante arbitraire.

Les surfaces de niveau sont donc des surfaces du second degré, de révolution autour de l'axe de rotation.

Elles seront des ellipsoïdes tant qu'on aura $\omega^2 < \mu$.

Elles deviendront des plans perpendiculaires à l'axe lors-

que l'on aura $\omega^2 = \mu$, et c'est ce que l'on peut vérifier immédiatement.

Enfin, pour les vitesses angulaires plus grandes que $\sqrt{\mu}$, c'est-à-dire telles que l'on ait $\omega^2 > \mu$, on a des hyperboloïdes à deux nappes ou à une nappe, suivant que c sera négatif ou positif.

Dans tous les cas, la valeur de la constante sera déterminée en calculant le volume de liquide compris entre la surface du vase et une des surfaces de niveau, et en l'égalant au volume de la masse donnée du liquide.

Dans le cas de $\omega^2 > \mu$, la grandeur de ce volume détermine non-seulement la valeur absolue, mais encore le signe de cette constante, c'est-à-dire fait connaître si l'hyperboloïde est à une ou à deux nappes; et il est facile de s'en assurer généralement.

Pour cela, considérons une valeur quelconque de ω et prenons pour c une valeur négative; l'hyperboloïde sera à deux nappes, et la surface libre du liquide sera concave, sans quoi la pression n'y serait pas dirigée vers l'intérieur. Si nous faisons décroître la valeur de c jusqu'à zéro, le cône asymptote restera le même, et, la surface de l'hyperboloïde s'en rapprochant continuellement, le volume qui s'y termine diminuera et tendra à se réduire à celui qui sera terminé au cône. Actuellement, partons d'une valeur positive de c, l'hyperboloïde sera à une nappe, et la surface libre du liquide sera convexe; de sorte que, si nous faisons diminuer c, le volume du liquide compris dans le vase ira en augmentant, parce que la surface qui le termine se rapprochera de plus en plus du même cône, auquel elle sera extérieure; et pour $c = 0$, ce volume acquiert sa plus grande valeur, qui est précisément la même que la plus petite pour les hyperboloïdes à deux nappes. D'où il suit que, parmi tous les hyperboloïdes des deux espèces, il n'y en a qu'un seul, et il y en a toujours un

si le vase est indéfini, qui corresponde à une masse donnée de liquide et à une vitesse angulaire donnée, plus grande que $\sqrt{\mu}$.

Équilibre d'une masse fluide dont les molécules s'attirent mutuellement et sont animées d'un mouvement de rotation uniforme.

144. Dans les questions précédentes, la force qui sollicitait chaque molécule était connue, et indépendante de la position des autres; mais dans le cas actuel il n'en est plus ainsi, puisqu'une molécule quelconque étant attirée par toutes les autres, la résultante de ces actions dépendra nécessairement de la figure du liquide; et comme cette figure est inconnue, les forces désignées par X, Y, Z le sont également, et le problème devient d'une difficulté beaucoup plus grande.

Lorsque le liquide est homogène et que l'attraction est en raison inverse du carré de la distance, on ne peut encore résoudre le problème qu'en supposant une vitesse angulaire très-petite, qui donne au liquide une forme peu différente de la sphère. Mais on peut toujours vérifier que la figure d'un ellipsoïde de révolution satisfait à la condition de l'équilibre, pourvu que la vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite. M. Jacobi a été au delà, et a démontré qu'un ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux peut aussi convenir; mais cette discussion nous entraînerait trop loin, et nous nous bornerons au cas de l'ellipsoïde de révolution.

Soit

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{(x^2 + y^2)}{c^2(1 + \lambda^2)} = 1$$

l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des

z, et aplati aux pôles; les trois composantes X, Y, Z de l'attraction de la masse de cet ellipsoïde sur un point de sa surface ayant pour coordonnées x, y, z, auront pour expressions

$$X = \frac{2\pi\rho f x}{\lambda^3}[\lambda - (1 + \lambda^2)\,\text{arc tang}\,\lambda],$$

$$Y = \frac{2\pi\rho f y}{\lambda^3}[\lambda - (1 + \lambda^2)\,\text{arc tang}\,\lambda],$$

$$Z = \frac{4\pi\rho f z}{\lambda^3}(1 + \lambda^2)(\text{arc tang}\,\lambda - \lambda),$$

ρ désignant la densité du liquide. Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que la résultante de ces trois forces et de la force centrifuge dont les composantes sont $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, soit perpendiculaire en chaque point à la surface de l'ellipsoïde; ce qui donnera entre les coordonnées de cette surface et leurs différentielles l'équation suivante, dans laquelle on a fait $\frac{\omega^2}{4\pi\rho f} = \varepsilon$:

$$[\lambda - (1 + \lambda^2)\,\text{arc tang}\,\lambda + 2\varepsilon\lambda^3](x dx + y dy)$$
$$+ 2(\text{arc tang}\,\lambda - \lambda)(1 + \lambda^2)\,z dz = 0.$$

Mais, d'après l'équation de l'ellipsoïde, on doit avoir entre ces mêmes coordonnées l'équation

$$x dx + y dy + (1 + \lambda^2)\,z dz = 0.$$

La valeur de zdz devant être la même dans ces deux équations, quels que soient x, y, dx, dy, on aura la condition suivante, qui déterminera λ,

$$\lambda - (1 + \lambda^2)\,\text{arc tang}\,\lambda + 2\varepsilon\lambda^3 = 2(\text{arc tang}\,\lambda - \lambda).$$

Cette équation a trois racines nulles, dont on ne tiendra aucun compte; elle peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \frac{3\lambda + 2\varepsilon\lambda^3}{3 + \lambda^2} - \text{arc tang}\,\lambda = 0.$$

Chacune de ses racines réelles positives déterminera le rapport des deux axes de l'ellipse génératrice, et leur grandeur se déduira du volume connu du liquide. Tout se réduit donc à la recherche du nombre et de la valeur des racines de l'équation (1), qui sont égales deux à deux et de signes contraires, mais dont il suffira de considérer les valeurs positives. Ces racines sont les abscisses des points de rencontre de l'axe des x et de la courbe dont l'équation est

$$(2) \qquad y = \frac{3x + 2\varepsilon x^3}{3 + x^2} - \text{arc tang}\, x.$$

On trouve, en la différentiant,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2[\varepsilon x^4 + 2(5\varepsilon - 1)x^2 + 9\varepsilon]}{(1 + x^2)(3 + x^2)^2}.$$

Cette expression est nulle pour $x = 0$, et positive pour des valeurs de x très-petites; de sorte que la courbe est tangente à l'axe des x à l'origine, et commence par s'élever au-dessus de cet axe du côté des x positifs.

La tangente à cette courbe sera parallèle à l'axe des x, aux points dont les abscisses seront données par l'équation

$$(3) \qquad \varepsilon x^4 + 2(5\varepsilon - 1)x^2 + 9\varepsilon = 0.$$

Si cette équation n'avait pas de racines réelles, la courbe s'éloignerait toujours de l'axe des x, et l'équation (1) n'aurait pas non plus de racines réelles. Ainsi, on reconnaît d'abord que l'on doit avoir

$$5\varepsilon - 1 < 0, \quad \text{ou} \quad \varepsilon < \tfrac{1}{5},$$

car sans cela une valeur positive de x^2 ne satisferait pas à l'équation (3), et la condition de réalité des valeurs de x^2 exigerait même que l'on eût $\varepsilon < \frac{1}{8}$. Mais cela ne suffit pas pour que l'équation (1) ait des racines réelles; il est nécessaire que la valeur de x qui donne le minimum de l'ordon-

née positive y, ou, en d'autres termes, la plus grande racine positive de l'équation (3) étant substituée dans (2), donne pour y une valeur négative. Car alors la courbe coupera une première fois l'axe des x, avant d'arriver à ce point, et le recoupera une seconde fois au delà, puisque l'ordonnée finit par être positive et indéfiniment croissante. Si le minimum de y était nul, les deux racines de l'équation (1) seraient égales, et s'il était positif, elles n'existeraient pas. On voit par là que, pour que la question proposée soit possible, il faut que l'on ait l'équation (3) conjointement avec l'inégalité $y < 0$ correspondante à la plus grande racine de cette équation. Il en résulte, par l'élimination de ε,

$$\text{arc tang}\, x - \frac{(7x^2 + 9)x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité est nul pour $x = 0$. Sa dérivée est aussi nulle pour cette même valeur, puis elle devient négative quand x croît; elle redevient nulle pour la seule valeur $x = \sqrt{3}$, à partir de laquelle elle reste constamment positive. Le premier membre de l'inégalité commence donc par être négatif, devient nul pour une seule valeur de x qui est plus grande que $\sqrt{3}$, puis reste constamment positif. On satisfera donc à l'inégalité par toute valeur de x plus grande que la racine positive de l'équation

$$\text{arc tang}\, x - \frac{(7x^2 + 9)x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} = 0.$$

On trouve facilement, pour valeur approchée de cette racine,

$$x = 2,5293.$$

La valeur correspondante de ε donnée par l'équation (3) est

$$\varepsilon = 0,1123,$$

et l'on reconnaît facilement que la valeur trouvée de x est la plus grande des deux qui, substituées dans l'équation (3), donneraient cette valeur de ε; mais cela n'était pas nécessaire à vérifier, parce que le maximum de y est nécessairement plus grand que zéro, puisque la courbe s'élève d'abord au-dessus de l'axe des x; d'où il suit que si une valeur de x tirée de l'équation (3) donne $y = 0$ ou $y < 0$, cette valeur correspond au minimum de y, et ne peut être que la plus grande des deux racines de l'équation (3).

Toute valeur x' de x, plus grande que 2,5293, fournit donc deux valeurs positives pour λ, entre lesquelles x' sera compris. Mais, en considérant la plus grande valeur de x^2 tirée de l'équation (3), on voit qu'elle varie en sens contraire de ε; ainsi le problème aura deux solutions quand on aura

$$x > 2,5293 \quad \text{et} \quad \varepsilon < 0,1123;$$

et il en aura une seule pour

$$x = 2,5293 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0,1123;$$

x croissant indéfiniment, ε tend vers zéro; si l'on remplace ε par sa valeur, on a

$$\frac{\omega^2}{4\pi\rho f} < 0,1123.$$

Cette inégalité fait connaître la plus grande vitesse angulaire qui soit compatible avec la figure d'un ellipsoïde de révolution.

A cette limite de ω, il n'y a qu'une seule figure possible. Si l'on fait décroître ω à partir de cette limite jusqu'à zéro, l'une des valeurs de λ augmente indéfiniment, l'autre tend vers zéro. L'un des ellipsoïdes tend donc indéfiniment vers une sphère, et l'autre vers un plan; de sorte que pour $\omega = 0$ on n'a plus réellement qu'une solution, qui est la sphère.

De l'équilibre des fluides pesants.

145. Lorsque la pesanteur est la seule force qui sollicite les molécules d'un fluide homogène, on a

$$dp = -\rho g dz, \quad \text{d'où} \quad p = -\rho g z + c;$$

et si P désigne la pression correspondante à $z = h$, on aura

$$p = \rho g (h - z) + P.$$

Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux, et la pression en chaque point ne dépend que de la hauteur.

Si la densité ρ était variable d'une manière continue ou discontinue, il faudrait qu'elle fût une fonction de z, et l'on aurait

$$p = -g \int \rho dz.$$

146. Lorsque nous avons calculé les accroissements de la pression, en passant d'un point à un autre d'un fluide, nous avons supposé ce fluide décomposé en parallélipipèdes contigus, et nous avons cherché de combien croissait la pression en passant d'une face à la face parallèle. Mais il est clair que, s'il existait dans le fluide des cloisons qui empêchassent la communication des parties, ces raisonnements ne subsisteraient plus, ainsi que leurs conséquences. Et, en général, lorsqu'il existe dans un fluide des cloisons qui n'interceptent pas entièrement la communication, mais qui la modifient, il est nécessaire d'examiner à quel point la théorie précédemment établie se trouve elle-même modifiée par leur présence.

Ainsi, lorsque la pesanteur est la seule force qui agit sur le fluide, nous avons vu que l'accroissement de la pression est nul en passant d'une face verticale d'un parallélipipède à la face parallèle, mais en supposant que ce parallélipi-

pède soit formé du fluide sans interruption. D'où il résulte que l'on ne pourra affirmer que la pression est la même en deux points situés sur un même plan horizontal, que dans le cas où l'on pourra passer de l'un à l'autre par l'intermédiaire du fluide non interrompu, et en restant dans ce même plan horizontal.

147. Cela posé, considérons divers liquides en équilibre dans deux vases qui communiquent l'un à l'autre par un canal que nous supposerons horizontal, pour fixer les idées. Menons un plan horizontal par le point le plus bas de ce canal, les liquides qui sont au-dessous de ce plan dans les deux vases pourront être soumis à des pressions très-différentes en des points situés sur un même plan horizontal. Si maintenant nous menons un plan horizontal par le point le plus élevé du canal, la pression sera la même en tous les points d'un plan horizontal intermédiaire quelconque; et, pour les plans supérieurs, elle pourra être différente dans les deux vases. Mais dans chacun d'eux les parties supérieures au canal seront soumises aux lois démontrées précédemment, et elles ne seront assujetties l'une par rapport à l'autre qu'à la condition de produire une même pression sur le plan horizontal mené par le point le plus élevé du canal. Et de même, les parties situées en dessous du canal seront soumises à l'action d'une pression égale, à leur partie supérieure, et satisferont, indépendamment l'une de l'autre, aux conditions générales de l'équilibre.

Ces considérations s'appliquent à la théorie des siphons, des baromètres, des niveaux, de la presse hydraulique, etc.

148. *Pression sur les parois.* — Considérons d'abord une paroi plane, et partageons-la en éléments infiniment petits $d\lambda$. Désignons par z la distance d'un quelconque d'entre eux à la surface extérieure du liquide, que nous

supposerons homogène. La pression produite par le liquide sur l'élément $d\lambda$, indépendamment de la pression extérieure exercée sur la surface, sera $g\rho z d\lambda$, et la somme de toutes les pressions sera

$$g\rho\Sigma z d\lambda, \quad \text{ou} \quad g\rho A z_1,$$

A désignant l'aire de la paroi et z_1 la distance de son centre de gravité à la surface du liquide. D'où il résulte que la pression restera la même, quelque position que prenne la paroi, pourvu que son centre de gravité reste fixe.

Cette pression est tout à fait indépendante de la forme du vase, et l'on peut produire, sur le fond du vase, une pression considérable avec un poids très-faible de liquide, pourvu que la distance à la surface libre soit très-grande.

Quant au point d'application de la résultante de toutes les pressions, auquel on a donné le nom de *centre de pression,* on le calculerait par la théorie ordinaire du centre des forces parallèles. Il est facile de voir qu'il est situé plus bas que le centre de gravité de l'aire. En effet, menons par ce dernier une horizontale dans le plan de la paroi; elle en partagera l'aire en deux parties dont les moments, par rapport à cette horizontale, seront égaux. Mais les pressions exercées sur la partie de la surface située au-dessous de cette ligne donneraient, par rapport à elle, un moment plus grand que celles qui s'exercent sur la partie supérieure; car, en concevant la surface totale partagée en éléments égaux, les pressions exercées sur chacun de ceux de la partie inférieure seront plus grandes que les plus grandes de celles qui ont lieu dans la partie supérieure. Or, si l'on prenait toutes celles-ci égales à la plus grande d'entre elles, qui se rapporte aux points situés sur l'horizontale menée par le centre de gravité, et toutes les autres égales à la plus petite d'entre elles, qui se rapporte aux points situés sur cette même horizontale, les sommes de moments seraient égales. Donc, en

les prenant telles qu'elles sont, la somme des moments est plus grande pour celles qui se rapportent à la partie inférieure; donc le centre des forces de pression exercées sur la paroi est au-dessous de l'horizontale menée par son centre de gravité; ce qu'il fallait démontrer.

Pour connaître les coordonnées de ce point, il faut calculer, par rapport aux trois plans coordonnés, la somme des moments des pressions exercées sur chaque élément de la paroi, et la diviser par la somme des pressions.

Considérons d'abord les moments par rapport au plan des x et y.

Représentons par $d\lambda$ un élément infiniment petit de la paroi; la pression qui s'exerce sur lui sera $g\rho z d\lambda$, et son moment aura pour valeur $g\rho z^2 d\lambda$. Si donc on désigne par x', y', z' les coordonnées du centre de pression, par x_1, y_1, z_1 celles du centre de gravité de la paroi, et par A son aire, on aura

$$\Sigma z^2 d\lambda = z' \Sigma z d\lambda = \mathrm{A} z' z_1,$$

les deux intégrales Σ s'étendant à tous les éléments de la paroi.

On trouvera de même, en prenant les moments par rapport aux deux autres plans de projection,

$$\Sigma yz d\lambda = \mathrm{A} y' z_1, \quad \Sigma xz d\lambda = \mathrm{A} x' z_1.$$

Les coordonnées du centre de pression ont donc pour valeurs

$$x' = \frac{\Sigma xz d\lambda}{\mathrm{A} z_1}, \quad y' = \frac{\Sigma yz d\lambda}{\mathrm{A} z_1}, \quad z' = \frac{\Sigma z^2 d\lambda}{\mathrm{A} z_1}.$$

149. Considérons, en particulier, le cas d'un trapèze dont les bases sont horizontales. Il est facile de reconnaître que le centre de pression est situé sur la ligne qui joint le milieu des deux bases; de sorte qu'il suffit de connaître une

des trois coordonnées de ce point, par exemple z'. Pour cela, partageons le trapèze en tranches infiniment petites comprises entre des parallèles aux bases, la somme $\Sigma z^2 d\lambda$ pourra s'obtenir en multipliant la surface de chacune de ces tranches par la valeur correspondante de z^2, et faisant la somme de ces produits dans toute l'étendue du trapèze. Soient a la base supérieure du trapèze, b sa base inférieure, h sa hauteur, u la distance d'une tranche quelconque à la base supérieure, c la distance de cette base au niveau du liquide, et γ l'angle du plan du trapèze avec le plan horizontal. L'aire d'une tranche quelconque aura pour expression

$$\left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du,$$

et l'on aura

$$z = c + u \sin \gamma.$$

Il faudra donc calculer

$$\int (c + u \sin \gamma)^2 \left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du,$$

et diviser le résultat par $A z_1$, ou par

$$\frac{h(a+b)}{2} (c + u_1 \sin \gamma);$$

on connaîtra ainsi

$$z', \quad \text{ou} \quad c + u' \sin \gamma.$$

La valeur de u' déterminera la position du centre de pression dans le trapèze, plus commodément que z'. En effectuant les calculs indiqués, on trouve

$$u' = \frac{h^2 (a + 3b) \sin \gamma + 2hc(a + 2b)}{2h(a + 2b) \sin \gamma + 6c(a + b)};$$

si l'on a $c = 0$, c'est-à-dire si la base supérieure est au

niveau du liquide, on a

$$u' = \frac{h(a + 3b)}{2(a + 2b)}.$$

Dans ce cas, le centre de pression est indépendant de l'inclinaison de la paroi.

Si en même temps on a

$$a = 0, \quad \text{ou} \quad b = 0,$$

on trouve, dans le premier cas, $u' = \frac{3h}{4}$, et, dans le second, $u' = \frac{h}{2}$.

Le trapèze est alors réduit à un triangle : dans le premier cas, son sommet est à fleur d'eau, et, dans le second, c'est sa base qui s'y trouve.

Si $a = b$, la paroi a la forme d'un parallélogramme, et l'on trouve

$$u' = \frac{2h}{3}.$$

150. Les pressions exercées sur une paroi courbe ne sont pas toujours réductibles à une seule force, parce qu'elles ne sont plus parallèles; mais, comme elles sont appliquées à un système rigide, elles sont toujours réductibles à deux forces au plus. L'expression de chacune des pressions élémentaires étant connue, ainsi que les coordonnées de son point d'application, on pourra toujours, par les méthodes ordinaires, les réduire à trois forces dirigées suivant les axes de coordonnées, et à trois couples ayant leurs axes dans ces mêmes directions. On verra alors si la condition nécessaire pour qu'il y ait une résultante est remplie, et, dans ce cas, on la déterminera facilement. Dans le cas contraire, le système des forces se trouvera réduit à une force et un couple, et l'on pourra, si l'on veut, le réduire à deux forces seulement.

151. Considérons, en particulier, les pressions exercées sur la surface d'un corps plongé, soit en totalité, soit en partie, dans un liquide pesant en équilibre. Dans ce cas, il est facile de démontrer que les composantes horizontales des pressions se détruisent, et qu'il ne reste que les composantes verticales, qui ont toujours une résultante.

En effet, considérons la portion de surface comprise entre deux plans horizontaux infiniment voisins, et occupons-nous d'abord des composantes des pressions qu'elle supporte parallèlement à l'axe des x. Nous pouvons faire la décomposition de la surface d'une manière quelconque; et, dans ce premier cas, nous la partagerons en éléments par des plans parallèles au plan des x et z, et infiniment rapprochés; ils se projetteront deux à deux suivant le même rectangle $dydz$ sur le plan des y et z. Or, si l'on désigne par p la pression qui correspond à la distance de la tranche à la surface libre du liquide, et par α, β, γ les angles que la normale en un point quelconque de la tranche fait avec les axes des x, des y et des z, les composantes de la pression $p\omega$ qui s'exerce sur un élément ω de cette tranche seront

$$p\omega\cos\alpha,\quad p\omega\cos\beta,\quad p\omega\cos\gamma,$$

ou

$$pdydz,\quad pdxdz,\quad pdxdy,$$

c'est-à-dire qu'elles sont respectivement égales aux pressions que supporteraient au même point les projections de l'élément ω sur trois plans parallèles aux plans coordonnés. Mais pour les deux éléments qui ont la même projection $dydz$ sur le plan des y et z, les composantes parallèles à l'axe des x, ayant ainsi des valeurs égales $pdyz$, et dans des directions contraires, se détruiront; et tous les éléments de la tranche pouvant être considérés ainsi deux à deux, il s'ensuit que toutes les composantes parallèles à l'axe des x,

des pressions qu'elle supporte, se détruisent mutuellement. Il en serait de même des composantes parallèles à l'axe des y pour lesquelles on ferait la décomposition en éléments qui se projetteraient deux à deux suivant la même surface $dxdz$; et il résulte de là qu'il ne reste que les composantes verticales des pressions supportées par la tranche. Il n'y a donc plus qu'à composer ces dernières dans toute l'étendue de la surface plongée.

Concevons cette surface décomposée en éléments qui se projettent sur le plan des x et y suivant les rectangles $dxdy$; dans ces éléments, certaines parties de la surface pourront avoir deux à deux la même projection, et donneront lieu à des composantes de sens contraire, qui se réduiront à une force dirigée de bas en haut, et égale au poids du liquide qui remplacerait la partie du corps ayant la même projection $dxdy$. Le même résultat aura lieu pour les éléments de la surface qui seront placés de telle sorte que la verticale qui y passe ne rencontre pas une seconde fois la surface du corps avant de percer le plan horizontal qui termine le liquide.

Il suit de là que le corps est poussé en sens contraire de la pesanteur, comme le serait, dans le sens de cette force, la partie du liquide dont il tient la place. Toutes les pressions qu'il supporte ont donc une résultante égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de cette portion du liquide, en sens contraire de la pesanteur. Ce corps est sollicité, en outre, par son poids appliqué en son propre centre de gravité; de sorte qu'il ne sera en équilibre que si son poids est égal au poids du liquide qu'il déplace, et que le centre de gravité de ce dernier soit sur la verticale menée par le centre de gravité du corps.

Ce principe d'hydrostatique, qui a été découvert par Archimède, et qui s'applique également aux liquides et aux gaz, s'énonce ordinairement en disant qu'*un corps plongé*

dans un fluide quelconque en équilibre, perd une quantité de son poids égale au poids du fluide qu'il déplace.

152. Dans la démonstration que nous venons d'en donner, nous avons analysé toutes les pressions qui ont lieu sur la surface du corps plongé; mais on pourrait s'en dispenser et en déterminer directement l'effet total. En effet, le corps éprouve les mêmes pressions qu'éprouvait le liquide qu'il déplace, et qu'on pouvait supposer solidifié, sans troubler l'équilibre. Or, cette portion de liquide ne prenant aucun mouvement, il faut que les pressions qu'elle éprouve détruisent exactement l'effet de la pesanteur, et, par conséquent, aient pour résultante une force verticale égale à son poids et passant par son centre de gravité. Donc tout corps plongé dans un fluide se trouve soumis à l'action de deux forces verticales contraires : l'une égale à son poids, et appliquée à son centre de gravité; l'autre égale au poids du liquide déplacé, et passant par le centre de gravité de ce liquide.

Il résulte de là que, pour connaître le poids d'un corps, il faut le peser dans le vide. Si l'on savait combien il pèse dans l'air ou dans tout autre fluide, il faudrait ajouter à ce poids celui d'un volume égal de ce fluide, pour avoir le véritable poids du corps.

C'est sur les principes précédents qu'est fondée la théorie des aréomètres et de la balance hydrostatique.

De l'équilibre des corps flottants.

153. Pour qu'un corps solide, en partie plongé dans un liquide, soit en équilibre, il est nécessaire, comme nous l'avons dit, que son poids soit égal à celui du liquide déplacé, et que son centre de gravité soit sur la même verticale que celui de cette portion du liquide. Si nous suppo-

sous ce liquide homogène, ainsi que le corps qui flotte à sa surface, le centre de gravité du liquide déplacé coïncide avec celui de la partie plongée du corps solide. Ainsi, pour déterminer les positions suivant lesquelles ce corps peut rester en équilibre à la surface du liquide, il faut le couper par un plan tel, que le volume de l'une des parties soit au volume entier, comme la densité du corps est à celle du liquide, et que les centres de gravité de cette partie et du corps entier soient sur une même perpendiculaire au plan sécant. Il suffit alors de placer le corps de manière que ce plan coïncide avec la surface du liquide, pour que l'équilibre ait lieu.

Pour donner un exemple de cette détermination, considérons un prisme triangulaire droit, ayant ses arêtes horizontales. Dans sa position d'équilibre, il pourra avoir deux de ces trois arêtes, ou une seule au-dessous du niveau du liquide; nous examinerons d'abord ce dernier cas. Il est facile de voir que la longueur du prisme n'a aucune influence sur la position cherchée, et, de plus, que tout plan parallèle aux arêtes partage le volume dans le même rapport que la base. Nous pouvons donc nous borner à considérer cette dernière.

Soient ABC cette base, a, b, c ses trois côtés, C le sommet plongé, DE la ligne de flottaison ou l'intersection avec la surface du liquide, F et I les milieux de AB et DE, r le rapport de la densité du corps à celle du liquide. Posons

$$\mathrm{CF} = f, \quad \mathrm{CD} = x, \quad \mathrm{CE} = y,$$

et désignons par α, 6 les angles ACF, BCF.

La question consiste à mener la droite DE (*fig.* 8) de telle sorte que le rapport des triangles CDE, CAB soit r, et que la ligne FI, qui est parallèle à celle qui joindra les centres de gravité de ces triangles, soit perpendiculaire

à DE, condition qui revient à celle de l'égalité des lignes DF, FE.

Les deux équations qui doivent déterminer x et y sont donc

$$(1)\qquad xy = rab,\quad x^2 - 2fx\cos\alpha = y^2 - 2fy\cos6,$$

d'où, en éliminant y,

$$(2)\qquad x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2rabfx\cos6 - r^2a^2b^2 = 0.$$

Cette équation a nécessairement deux racines réelles, l'une positive, et l'autre négative qui ne se rapporte pas à la question. Si les deux autres racines sont réelles, la règle des signes de Descartes montre qu'elles sont positives; il peut donc y avoir au plus trois positions d'équilibre, pour lesquelles le sommet C serait immergé; et cela aura lieu si les trois valeurs réelles de x sont plus petites que a, et donnent pour y des valeurs plus petites que b.

Si les deux sommets A et B étaient plongés dans le liquide, le rapport des surfaces BDEA et ABC serait r, et, par conséquent, celui des triangles CDE, ABC serait $1-r$; d'ailleurs, les centres de gravité de ces derniers et de BDEA étant en ligne droite, il est clair qu'il suffit de changer r en $1-r$ dans les équations (1), et l'équation en x relative au nouveau cas sera

$$x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2(1-r)abfx\cos6 - (1-r)^2a^2b^2 = 0.$$

154. Si le triangle ABC est isocèle, on a

$$b = a,\quad \cos6 = \cos\alpha = \frac{f}{a},\quad f^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

les équations (1) deviennent

$$xy = ra^2,\quad x^2 - y^2 - \frac{2f^2}{a}(x-y) = 0.$$

On a d'abord pour solution

$$x = y = a\sqrt{r},$$

et, supprimant le facteur $x - y$ dans la seconde équation, il reste à trouver les solutions des deux suivantes :

$$xy = ra^2, \quad x + y = \frac{2f^2}{a}.$$

Les valeurs de x et y seront donc données, comme on pouvait le prévoir, par une même équation du second degré, qui sera

$$(3) \quad x^2 - \frac{2f^2}{a}x + ra^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 - \frac{(4a^2 - c^2)}{2a}x + ra^2 = 0;$$

ses racines seront imaginaires si l'on a

$$r > \frac{f^4}{a^4}, \quad \text{ou} \quad r > \left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right)^2;$$

elles seront égales si $r = \left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right)^2$, et l'on aura encore $x = y$, de sorte que cette solution doit coïncider avec la première. En effet, on trouve $x = \frac{d^2}{a}$, et comme on a

$$f^4 = a^4 r,$$

il en résulte

$$f^2 = a^2\sqrt{r} \quad \text{et} \quad x = a\sqrt{r},$$

comme dans le premier cas.

Si l'on a $r < \left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right)^2$, les deux racines sont réelles et positives; elles donnent donc des positions d'équilibre, si elles sont moindres que a.

L'équation relative au cas où les deux sommets A, B seraient immergés, s'obtiendra en changeant r en $1 - r$

dans la précédente, et sera

$$(4) \qquad x^2 - \frac{(4a^2 - c^2)}{2a} x + (1 - r) a^2 = 0,$$

et donnerait lieu à une discussion analogue.

Si le triangle est équilatéral, on a $c = a$, et les équations (3) et (4) deviennent

$$x^2 - \frac{3a}{2} x + ra^2 = 0,$$

$$x^2 - \frac{3a}{2} x + (1 - r) a^2 = 0.$$

Les racines de la première sont

$$x = \frac{3a}{2} \pm \frac{a}{4}\sqrt{9 - 16r}.$$

Elles seront réelles si l'on a $r < \frac{9}{16}$, et elles seront toutes les deux plus petites que a si l'on a

$$\sqrt{9 - 16r} < 1, \quad \text{ou} \quad r > \tfrac{1}{2}.$$

Il y aura donc trois positions d'équilibre pour lesquelles le sommet C sera immergé, si r est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. L'équation relative aux deux sommets immergés a pour racines

$$x = \frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{16r - 7};$$

ses racines seront réelles si l'on a $r > \frac{7}{16}$, et elles seront plus petites que a si l'on a

$$\sqrt{16r - 7} < 1, \quad \text{ou} \quad r < \tfrac{1}{2};$$

il y aura donc trois positions d'équilibre pour lesquelles les deux sommets A, B seront immergés, si r est compris

entre $\frac{1}{2} - \frac{1}{16}$ et $\frac{1}{2}$, condition qui ne peut être remplie en même temps que celle qui se rapporte au cas précédent.

155. Les prismes ou cylindres homogènes peuvent aussi être en équilibre, en supposant leurs arêtes verticales, et il en serait de même si, au lieu d'être homogènes ils étaient composés de couches homogènes, de densité variable, et perpendiculaires aux arêtes. Dans ce cas, les centres de gravité du liquide déplacé et du corps solide étant nécessairement sur la même verticale, il suffirait que le poids du premier fût égal à celui du second pour que l'équilibre eût lieu. Si, au lieu d'un cylindre, on avait un solide de révolution, ses positions d'équilibre, en supposant son axe vertical, n'offriraient pas plus de difficulté; il suffirait de partager le volume par un plan perpendiculaire à son axe, de telle sorte que le rapport de l'une des deux parties au tout fût égal à celui de la densité moyenne du corps à celle du liquide.

Stabilité de l'équilibre des corps flottants.

156. L'équilibre d'un corps flottant est stable ou instable, suivant que ce corps tend à revenir vers sa première position, ou à s'en éloigner, lorsqu'il en a été tant soit peu écarté. Si ce corps est un prisme ayant ses arêtes horizontales, il est facile de voir qu'en général ses positions d'équilibre stable et instable se succèdent alternativement. En effet, si on l'écarte d'une manière continue d'une position d'équilibre stable, pour le faire parvenir à une autre position stable, il tendra à revenir à la première jusqu'à un certain point, passé lequel il tendra à s'en éloigner pour se rapprocher de la seconde position. Il existe donc une position intermédiaire telle que, quand on l'écarte d'un côté ou de l'autre, il tend à s'en éloigner; et, par consé-

quent, cette position est celle d'un équilibre instable. Donc, entre deux positions d'équilibre stable, il y en a une d'équilibre instable, et réciproquement.

157. Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que si un corps est coupé par un plan, le volume situé d'un côté de ce plan sera équivalent à celui qu'on obtiendrait en le coupant par un autre plan quelconque, faisant un angle infiniment petit avec le premier, pourvu qu'il passe par le centre de gravité de l'aire de la première section, c'est-à-dire, pour parler plus exactement, que la différence des deux volumes sera infiniment petite par rapport au volume compris entre ces plans.

En effet, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à ce volume, on peut regarder la surface du corps comme remplacée, dans le voisinage de la section, par une surface cylindrique qui lui serait perpendiculaire. Or on sait qu'un cylindre tronqué a pour mesure le produit d'une de ses bases par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de la seconde sur le plan de la première; d'où il résulte que toutes les sections menées par ce point, qui sera leur centre de gravité, donneront des cylindres tronqués égaux en volume, et, par conséquent, que les volumes compris entre deux sections quelconques, dont l'un s'ajoute et l'autre se retranche à l'un des cylindres tronqués pour former l'autre, sont équivalents.

Il est évident que la proposition énoncée et sa réciproque sont des conséquences de ce théorème.

158. Cela posé, considérons un corps en équilibre sur un liquide homogène; les centres de gravité de ce corps et du liquide déplacé sont situés sur une même verticale, et les poids de ce liquide et du corps sont égaux. Déplaçons-le maintenant infiniment peu d'une manière quelconque, en imprimant à tous ses points des vitesses infiniment petites;

l'équilibre sera stable, si ce déplacement reste toujours infiniment petit, et instable dans le cas contraire; la question consiste à distinguer ces deux cas l'un de l'autre, et c'est ce que nous allons faire au moyen du principe des forces vives.

Soient LQM (*fig.* 9) la section de la surface du corps par le plan horizontal qui termine le liquide, ou la ligne de flottaison;

ANBI la position qu'a prise, après le dérangement, la ligne de flottaison relative à l'équilibre;

L'NM'I la section faite dans le corps par le plan horizontal mené par le centre de gravité C de l'aire ANBI que nous désignerons par b;

G le centre de gravité du corps;

O celui du liquide déplacé par la partie ADB du corps;

V le volume de ce liquide dont le poids est égal à celui du corps;

θ l'angle de GO avec la verticale;

ζ la distance du point C au niveau du liquide, qui sera pris pour plan des x et y; $GO = a$;

ρ la densité du liquide, et M la masse du corps.

Les forces qui sollicitent le corps sont la pesanteur et les pressions exercées par le liquide sur la partie plongée de sa surface. La première se réduit à une force verticale, agissant de haut en bas et égale au poids du corps, qui est Mg, ou $g\rho V$. Les autres produisent le même effet que si tous les éléments de la partie plongée du volume du corps étaient sollicités par des forces verticales, dirigées de bas en haut et égales aux poids de ces éléments, considérés comme formés du liquide lui-même.

Les composantes X, Y sont donc nulles pour tous les points; et si l'on prend l'axe des z dans le sens de la pesanteur, on aura $Z = g$ pour tous les éléments du corps, et $Z = -g$ pour les éléments de la partie plongée, consi-

dérée comme formée du liquide. En considérant ainsi Z, le principe des forces vives donnera l'équation

$$\Sigma v^2 dm = 2\Sigma dm \int Z dz + C. \tag{1}$$

Les vitesses étant supposées très-petites, le premier membre est une quantité très-petite du second ordre, et dans le calcul du second membre, on n'aura le droit de négliger que les termes qui n'influeraient sur les résultats que de quantités d'un ordre supérieur au second.

Considérons d'abord les termes du second membre qui proviennent du poids des éléments du corps. On aura alors

$$\int Z dz = gz \quad \text{et} \quad 2\Sigma dm \int Z dz = 2g\Sigma z dm = 2gMz_1,$$

z_1 étant le z du centre de gravité du corps.

Quant à la partie immergée, nous la considérerons d'abord comme composée de la partie comprise entre les sections horizontales LQM, L'NM', et du volume situé audessous de la dernière. Ce dernier volume est lui-même égal au volume ADB ou V, augmenté du volume INBM', et diminué de INL'A.

La valeur de z étant actuellement $-g$, on a

$$\int Z dz = -g(z - z_0),$$

et cette intégrale restera constamment égale à gz_0 quand z sera négatif, la force Z devenant alors nulle. En reportant gz_0 dans la constante totale, on écrira seulement

$$\int Z dz = -gz$$

Si $d\omega$ désigne l'élément de volume, on aura

$$dm = \rho d\omega$$

et

$$2\Sigma dm \int Z dz = -2g\rho \int z d\omega.$$

Il ne s'agit donc plus que de calculer, pour les quatre vo-

lumes que nous venons d'indiquer, $\int z d\omega$, qui est le moment, par rapport au plan XY, du volume de la partie plongée, dans la position du corps à une époque quelconque.

Le déplacement étant supposé infiniment petit, les diverses sections que nous avons faites dans le corps peuvent toutes être considérées comme équivalentes à b; et la portion comprise entre les deux qui sont parallèles, peut être regardée comme cylindrique. Ainsi, pour cette première partie, on aura

$$\int z d\omega = \tfrac{1}{2} b \zeta^2.$$

Pour le volume ADB, on aura

$$\int z d\omega = \mathrm{V}(z_1 - a\cos\theta),$$

ou, en remplaçant $\cos\theta$ par $1 - \frac{\theta^2}{2}$,

$$\int z d\omega = \mathrm{V} z_1 - \mathrm{V} a + \frac{\mathrm{V} a \theta^2}{2},$$

si le point O est au-dessus de G; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe de a. Le volume INBM′ peut se décomposer en éléments prismatiques, ayant leurs arêtes verticales, et pour bases les éléments de l'aire ANBI.

Soient $d\lambda$ un de ces derniers, situé en R; RS $= u$ la perpendiculaire abaissée sur IN, et RT la hauteur du prisme. Son volume sera RT $d\lambda\cos\theta$, expression qu'on peut remplacer par $u\theta d\lambda$; en la multipliant par le z du milieu de RT, qui est $\zeta + \frac{1}{2} u \operatorname{tang}\theta$, ou simplement $\zeta + \frac{1}{2} u\theta$, on aura la valeur de $\int z d\omega$ relativement à cet élément : on trouvera ainsi

$$u\theta d\lambda(\zeta + \tfrac{1}{2} u\theta),$$

expression que l'on devra intégrer dans toute l'étendue de l'aire INB.

Mais on trouverait une expression semblable pour les éléments du volume INLA, à l'exception du z du milieu du

prisme, qui serait égal à $\zeta - \frac{1}{2} u\theta$; et comme les termes provenant de ce volume doivent être changés de signe, ils seraient exprimés par

$$- u\theta d\lambda (\zeta - \tfrac{1}{2} u\theta).$$

D'où l'on voit qu'il suffira de faire la somme des termes de la forme

$$u\theta d\lambda (\zeta + \tfrac{1}{2} u\theta)$$

dans toute l'étendue de l'aire ANBI, en regardant u comme positif dans la partie INB, et comme négatif dans l'autre. Mais $\int u d\lambda$ est nul, puisque IN contient le centre de gravité de l'aire ANBI; il reste donc $\frac{\theta^2}{2}\int u^2 d\lambda$. Désignons par bh^2 l'intégrale $\int u^2 d\lambda$, qu'on peut appeler le moment d'inertie de l'aire ANBI par rapport à NI; l'expression précédente deviendra $\frac{bh^2\theta^2}{2}$.

Réunissant les diverses parties de $\int z d\omega$, il vient

$$\int z d\omega = \tfrac{1}{2} b\zeta^2 + \tfrac{1}{2} bh^2\theta^2 + Vz_1 - Va + \frac{Va\theta^2}{2},$$

et l'équation (1) devient, en observant que $M = V\rho$ et comprenant le terme $2g\rho Va$ dans la constante,

$$(2) \qquad \Sigma v^2 dm = -g\rho b\zeta^2 - g\rho (bh^2 + aV)\theta^2 + c;$$

si le point O était au-dessous de G, il faudrait, comme nous l'avons fait remarquer, changer a en $-a$.

La constante c se déterminera par l'état initial; et si les vitesses initiales sont nulles ou infiniment petites, c sera elle-même infiniment petite.

Cela posé, le premier membre de l'équation (2) étant essentiellement positif, il en sera de même du second, et par conséquent les termes négatifs doivent constamment donner une somme infiniment petite, puisqu'elle doit être

moindre que c; ce qui exige que θ et ζ restent infiniment petits. D'où l'on conclut que, *lorsque le centre de gravité du corps est au-dessous du centre de gravité du liquide déplacé dans l'état d'équilibre, le dérangement restera toujours infiniment petit, et par conséquent l'équilibre est stable*. Mais si le centre de gravité du corps est au-dessus de celui du liquide déplacé, l'équation (2) se change dans la suivante :

$$\Sigma v^2 dm = - g\rho b\zeta^2 - g\rho(bh^2 - a\text{V})\theta^2 + c.$$

Or, quoique c soit infiniment petit, θ et ζ pourraient cesser de l'être si tous les termes qui renferment leurs carrés n'étaient pas négatifs. Il est donc nécessaire, pour la stabilité de l'équilibre, que l'on ait

$$bh^2 - a\text{V} > 0, \quad \text{ou} \quad a < \frac{bh^2}{\text{V}};$$

et comme bh^2 change en même temps que la direction de IN, il faut que l'inégalité précédente ait lieu, en prenant la plus petite valeur dont bh^2 soit susceptible, quand on suppose que IN prend toutes les directions autour du centre de gravité C de l'aire ANBI. *L'équilibre peut donc encore être stable lorsque le centre de gravité du corps est au-dessus de celui du fluide déplacé; il suffit que la distance de ces deux points soit moindre que le plus petit des moments d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport aux droites menées par son centre de gravité, divisé par le volume immergé.*

Oscillations d'un corps flottant.

159. Supposons qu'un corps symétrique, quant à sa figure et à sa densité, par rapport à un plan vertical, soit écarté infiniment peu de la position où il est en équilibre stable à

la surface d'un liquide, de telle sorte que son plan de symétrie soit resté vertical; et supposons, en outre, que toutes les vitesses initiales soient nulles.

Il est d'abord évident que tout étant symétrique, tant dans les forces que dans le déplacement, par rapport au même plan vertical, ce plan restera constamment vertical; et la position du corps sera déterminée à chaque instant, si l'on connaît la position d'un de ses points, par exemple de son centre de gravité, et la direction d'une ligne fixe dans ce corps, par exemple celle qui, dans l'état d'équilibre, contenait les centres de gravité du corps et du liquide déplacé.

Nous emploierons les mêmes dénominations que dans la question précédente, et il s'agira de déterminer θ et ζ (*fig.* 10). Lorsque ces quantités seront connues, la position du centre de gravité le sera aussi. Car, toutes les forces étant verticales, ce point se meut sur la verticale passant par sa position initiale; on pourra donc le construire dès qu'on connaîtra l'angle θ et la distance ζ du point C au niveau du liquide. D'ailleurs l'expression de son ordonnée $GF = z_1$ peut facilement s'obtenir. Soient $GH = l$, $CH = p$, on aura

$$z_1 = l \cos \theta - p \sin \theta + \zeta,$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier,

$$z_1 = l + \zeta - p\theta.$$

Le problème est donc entièrement ramené à la détermination de θ et ζ.

Le centre de gravité G se mouvant comme si toute la masse M y était réunie et que toutes les forces y fussent appliquées, on en déduira facilement une première équation entre θ et ζ. En effet, il suffira de supposer en G deux forces verticales : l'une égale à Mg, et dirigée dans le sens de la

pesanteur; l'autre, dirigée en sens contraire et égale au poids du liquide déplacé. Or, les volumes BCM′, ACL′ étant équivalents, le volume LDM est égal à $V + b\zeta$, et son poids est $g\rho V + g\rho b\zeta$; et comme $M = \rho V$, la résultante de toutes les forces sera $-g\rho b\zeta$. On aura donc

$$M\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -g\rho b\zeta, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{gb}{V}\zeta = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} - p\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{V}\zeta = 0.$$

Nous obtiendrons une seconde équation en considérant le mouvement de rotation autour du centre de gravité, supposé immobile.

Le poids du corps étant détruit, puisque le centre de gravité est fixe, il ne reste à considérer que la somme des moments des forces provenant de l'action du liquide, et qui sont appliquées, comme nous l'avons déjà dit, à tous les points de la partie immergée du corps.

Le moment résultant de toutes les forces relatives à la partie LML′M′, et considéré comme positif lorsqu'il tend à diminuer l'angle θ, est

$$g\rho b\zeta(l\sin\theta + p\cos\theta),$$

et peut se réduire à $g\rho bp\zeta$. Il faut y ajouter les moments provenant de ADB, M′CB, et en retrancher celui qui proviendrait de ACL′.

Or, la résultante des forces verticales appliquées à tous les points du volume ADB est appliquée en O et égale à $g\rho V$; le moment résultant sera donc $g\rho Va\sin\theta$, ou $g\rho aV\theta$.

Si maintenant nous décomposons le volume M′CB comme dans la question précédente, le moment du prisme ayant pour base $d\lambda$ sera, en désignant par u sa distance à

la perpendiculaire au plan de symétrie menée par C,

$$g\rho\theta u d\lambda\,(l \sin\theta + p\cos\theta + u\cos\theta),$$

ou simplement

$$g\rho\theta u\,(p+u)\,d\lambda,$$

et l'on devra faire la somme des expressions semblables dans toute l'étendue de l'aire projetée suivant CB.

Quant au volume ACL′, il faut supposer à tous ses points des forces dirigées dans le sens même de la pesanteur, et le moment d'un élément $d\lambda$ sera

$$-g\rho\theta u'\,(p-u')\,d\lambda,$$

u' désignant les distances dirigées en sens contraires de celles qui sont désignées par u. Si donc on intègre

$$g\rho\theta u\,(p+u)\,d\lambda$$

dans toute l'étendue de l'aire b, en regardant u comme positif à droite de C, et comme négatif à gauche, on aura la somme algébrique des moments correspondants aux deux parties M′CB, ACL′. On trouve ainsi

$$g\rho\theta p\int u d\lambda + g\rho\theta\int u^2 d\lambda.$$

Or $\int u d\lambda$ est nul, puisque le centre de gravité de l'aire b est sur la droite projetée en C; et si l'on pose encore

$$\int u^2 d\lambda = bh^2,$$

la dernière expression se réduit à

$$gb\rho\theta k^2.$$

En réunissant tous les moments, on obtient

$$g\rho bp\zeta + g\rho(bk^2 + a\mathrm{V})\,\theta;$$

et l'on devrait changer a en $-a$ si le point O était au-dessous de G.

Or, d'après la théorie du mouvement autour d'un axe fixe, cette somme de moments doit être égale à

$$-\,\mathrm{M}k^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$\mathrm{M}k^2$ étant le moment d'inertie du corps par rapport à la perpendiculaire au plan de symétrie, menée par son centre de gravité; on aura donc, en remplaçant M par $\rho\,\mathrm{V}$,

$$(2)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{gbp}{\mathrm{V}k^2}\zeta+\frac{g}{\mathrm{V}k^2}(bh^2+a\mathrm{V})\theta=0.$$

Les équations (1) et (2) renferment la solution complète de la question; elles se rapportent au cas où le centre de gravité du corps est au-dessous de celui du liquide déplacé dans la position d'équilibre. Il suffira d'y changer le signe de a, dans le cas où ces deux points seraient placés d'une manière inverse.

160. Intégrons d'abord ces équations en supposant que le corps soit, en outre, symétrique par rapport au plan mené par GO perpendiculairement au premier; ce qui est à peu près le cas des bâtiments de mer.

Nous aurons alors $p=0$, et les équations deviennent

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{gb}{\mathrm{V}}\zeta=0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\mathrm{V}k^2}(bh^2+a\mathrm{V})\theta=0.$$

Ces équations peuvent s'intégrer indépendamment l'une de l'autre, et l'on trouve

$$\zeta=\alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{gb}{\mathrm{V}}}+\alpha'\right),\quad \theta=6\cos\left[\frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(bh^2+a\mathrm{V})}{\mathrm{V}}}+6'\right].$$

i l'on suppose, pour plus de simplicité, que les vitesses

initiales soient nulles, on aura

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

en même temps que $t = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0;$$

et les valeurs de θ et ζ seront

$$(3) \quad \zeta = \alpha \cos t\sqrt{\frac{gb}{V}}, \qquad \theta = \beta \cos \frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(bh^2 + aV)}{V}};$$

les constantes α, β représentent alors les valeurs initiales de ζ et θ, et l'on voit que θ et ζ resteront constamment très-petits, puisqu'ils seront tout au plus égaux à α et β.

La valeur de z_1 étant $l + \zeta$, le mouvement du centre de gravité G sera le même que le mouvement vertical du point C. Ces mouvements, ainsi que celui de la droite GO autour du point G, sont les mêmes que ceux de pendules simples.

Si le point G est au-dessous de O, la valeur de θ sera

$$\theta = \beta \cos \frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(bh^2 - aV)}{V}},$$

et si l'on a

$$bh^2 - aV > 0,$$

θ restera toujours inférieur à β, et par suite très-petit.

Mais si l'on avait $bh^2 - aV < 0$, la valeur de θ s'exprimerait par des exponentielles, et ne resterait plus très-petite lorsque t croîtrait indéfiniment. La condition de stabilité de l'équilibre est donc $bh^2 - aV > 0$ lorsque G est au-dessus de O. C'est celle que nous avions déjà trouvée plus généralement.

161. Pour intégrer les équations générales (1) et (2),

on commencera par éliminer $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ de la première, ce qui la réduit à

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{bg\,(p^2 + k^2)}{\mathrm{V}k^2}\zeta + \frac{gp\,(bh^2 + a\mathrm{V})}{\mathrm{V}k^2}\theta = 0.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{bg\,(p^2 + k^2)}{\mathrm{V}\,k^2} = \alpha, \quad \frac{g\,(bh^2 + a\mathrm{V})}{\mathrm{V}k^2} = 6, \quad \frac{gbp}{\mathrm{V}\,k^2} = \delta,$$

les deux équations à intégrer seront

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \alpha\zeta + p6\theta = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \delta\zeta + 6\theta = 0.$$

Multiplions la seconde par une indéterminée λ, et ajoutons-la à la première ; puis posons

$$\zeta + \lambda\theta = x, \quad \frac{6\,(p + \lambda)}{\alpha + \lambda\delta} = \lambda, \quad \text{d'où} \quad \delta\lambda^2 + (\alpha - 6)\lambda - 6p = 0,$$

il en résultera

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \lambda\delta)x = 0,$$

d'où

$$x = c\cos t\sqrt{\alpha + \lambda\delta},$$

en supposant les vitesses initiales nulles.

Désignant par λ_1, λ_2 les deux racines de l'équation λ, que nous supposerons réelles, et telles que $\alpha + \lambda\delta$ soit positif, sans quoi x ne resterait pas toujours très-petit, nous aurons

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \zeta + \lambda_1\theta = c\cos t\sqrt{\alpha + \lambda_1\delta}, \\ \zeta + \lambda_2\theta = c'\cos t\sqrt{\alpha + \lambda_2\delta}, \end{array}\right.$$

d'où l'on déduira facilement les valeurs de θ et ζ en fonction de t, et des constantes c, c', qui se détermineront par les valeurs initiales de ζ et θ.

162. On peut remarquer que si, à partir de C, on porte sur la droite AB deux longueurs égales à λ_1, λ_2, d'un côté ou de l'autre suivant les signes de ces quantités, on aura deux points dont les distances au niveau du liquide seront exprimées respectivement par

$$\zeta + \lambda_1 \theta \quad \text{et} \quad \zeta + \lambda_2 \theta;$$

et, d'après les valeurs de ces deux expressions en fonction de t, le mouvement vertical de chacun de ces deux points sera le même que celui d'un pendule simple. Cette remarque curieuse a été faite, je crois, par M. Cauchy.

163. L'équation $\delta\lambda^2 + (\alpha - 6)\lambda - 6p = 0$ aura ses deux racines réelles et de signes contraires, lorsque G sera au-dessous de O, parce que 6 et δ seront positifs. Pour connaître le signe de $\alpha + \lambda\delta$, on posera

$$\alpha + \lambda\delta = y,$$

et l'on aura

$$y^2 - (\alpha + 6)y + \frac{6bg}{V} = 0,$$

équation dont les deux racines sont positives, de sorte que la valeur de x sera de la forme que nous avons supposée, et le déplacement restera infiniment petit.

Si G est au-dessus de O et que l'on ait $bh^2 - aV > 0$, 6 restera positif et les deux valeurs de λ sont réelles et de signes contraires; on trouve encore $\alpha + \lambda\delta > 0$, et le déplacement reste toujours infiniment petit comme cela devait être, puisque la condition de stabilité de l'équilibre est remplie.

Mais si, G étant au-dessus de O, on a $bh^2 - aV < 0$, 6

est négatif, et l'une des valeurs de $\alpha + \lambda\delta$ est négative. Les valeurs de θ et ζ renferment alors des exponentielles et ne restent plus très-petites; de sorte que les calculs précédents ne s'y appliquent plus. C'est, en effet, le cas où nous avions déjà démontré que l'équilibre est instable.

164. Les équations (3), relatives au cas où le corps est symétrique par rapport à deux plans, montrent que si la valeur initiale de ζ est nulle, on a $\alpha = 0$, et que par conséquent ζ est constamment nul. Alors le centre de gravité reste immobile, et il n'y a qu'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par ce point; de plus, le volume d'eau déplacé reste constant, puisque le point C est toujours à la surface du liquide.

Les équations (4), relatives à un seul plan de symétrie, démontrent que, lors même que la valeur initiale de ζ serait zéro, ce qui est le cas où le volume d'eau déplacé après le dérangement serait égal à V, on n'a pas constamment $\zeta = 0$, et par conséquent le volume immergé ne restera pas égal à V.

165. Dans les premières recherches sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants, on considérait un point particulier qu'on nommait *métacentre*, et que nous allons faire connaître, parce qu'on en fait encore usage aujourd'hui.

Lorsqu'un corps symétrique par rapport à un plan vertical est dérangé infiniment peu de sa position d'équilibre, il est sollicité par son poids et par la pression du liquide qui se réduit à une force verticale passant par le centre de gravité du liquide déplacé. Or, si la droite GH est rencontrée par la direction de cette force au-dessus de G, le corps tendra à reprendre sa première position, et si la rencontre a lieu au-dessous, il tendra à s'écarter de sa position

d'équilibre. D'où l'on concluait que l'équilibre était stable dans le premier cas, et instable dans le second. Quant à ce point de rencontre que l'on nommait *métacentre*, on le déterminait en supposant que le volume de liquide déplacé était équivalent à celui qui se rapportait à la position d'équilibre, ou que du moins on pouvait négliger son accroissement infiniment petit, sans qu'il en résultât aucune erreur sur la limite du point de rencontre des deux droites.

Cette théorie est défectueuse, parce que le volume infiniment petit que l'on négligeait, bien qu'il ne déplace qu'infiniment peu le centre de gravité du liquide, fait cependant varier d'une quantité finie la position du point de rencontre des deux droites, qui font entre elles un angle infiniment petit (1). Il faudrait donc suivre les différentes positions de ce point dans le mouvement du corps; ce qui ne peut se faire que quand le problème est résolu, et que l'on n'a plus besoin de savoir si les écarts restent infiniment petits. Mais ce qu'il est bon de remarquer, c'est que lors même que l'équilibre est stable, le point de rencontre en question se trouve tantôt au-dessus et tantôt au-dessous du centre de gravité du corps, excepté dans le cas particulier où la droite GO passe par le centre de gravité de la section à fleur d'eau. Or, il est clair que, si l'on avait su cela, on aurait renoncé à une démonstration qui aurait prouvé aussi bien la stabilité que l'instabilité de l'équilibre. Néanmoins il y a cela de remarquable, que le point de rencontre que l'on déterminait dans l'hypothèse inexacte où l'on aurait pu considérer le volume immergé comme constant, donne la véritable condition de stabilité. Les effets du déplacement de ce point sur la droite GH de part et d'autre de G ne peuvent renverser le corps que quand le

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe cahier.

métacentre est au-dessous de G. Mais c'est ce qu'on ne pouvait établir que par une analyse semblable à celle dont nous avons fait usage.

166. *Application à l'ellipsoïde.* — Commençons par chercher la condition de stabilité de l'équilibre d'un ellipsoïde homogène flottant sur un liquide, et dérangé infiniment peu, mais d'une manière quelconque, de sa position d'équilibre. Soient A, B, C (*fig.* 11) les trois demi-axes de l'ellipsoïde, D sa densité, G le centre de l'ellipsoïde, O le centre de gravité du volume immergé LMA, qui sera nécessairement au-dessous de G. Supposons que l'axe vertical AA′ soit celui dont la longueur est 2A, et que l'on ait $B > C$; conservons, du reste, toutes les dénominations précédentes.

La condition de stabilité de l'équilibre est $bh^2 > aV$, bh^2 étant le moment d'inertie de l'aire de la section LM par rapport à la droite menée par son centre, qui donne le moment minimum. Cette droite est le plus grand des deux axes principaux de l'ellipse; c'est donc celui qui est parallèle à l'axe 2B.

Si l'on désigne AB par x, l'équation qui en déterminera la valeur sera

$$(1) \qquad \frac{4\,DA^3}{\rho} = (3A - x)x^2.$$

Elle exprime que le poids de l'ellipsoïde est égal à celui du liquide déplacé, dont le volume est

$$V = \frac{\pi BC}{3A^2}(3A - x)^2.$$

Le théorème des moments fait connaître immédiatement la valeur de aV, qui est

$$aV = \frac{\pi BC}{4A^2}(2Ax - x^2)^2.$$

Les demi-axes de la section LM ont pour valeur

$$\frac{B}{A}\sqrt{2Ax - x^2} \quad \text{et} \quad \frac{C}{A}\sqrt{2Ax - x^2};$$

le premier est parallèle à l'axe 2B, le second à l'axe 2C de l'ellipsoïde, et ce dernier est le plus petit.

Or, le moment d'inertie d'une ellipse ayant pour demi-axes α, 6 est, par rapport à la direction de l'axe 6,

$$\frac{\pi 6 \alpha^3}{4};$$

donc le moment d'inertie minimum de l'aire LM sera

$$\frac{\pi BC^3}{4A^4}(2Ax - x^2)^2,$$

et la condition de stabilité est que cette expression soit plus grande que aV; ce qui donne, en supprimant les facteurs communs,

$$C^2 > A^2, \quad \text{ou} \quad C > A;$$

mais comme on a déjà B > C, la condition de la stabilité de l'équilibre se réduit à ce que l'axe vertical de l'ellipsoïde soit le plus petit des trois.

167. Cela posé, déterminons les oscillations de l'ellipsoïde, en supposant que le plan des axes 2A, 2C reste vertical, et que l'on ait A < C.

Il faudra commencer par résoudre l'équation (1).

On reconnaît immédiatement qu'elle n'a qu'une seule racine positive comprise entre o et 2A, et c'est celle qui se rapporte à la question. Cette racine étant connue, a le sera, ainsi que l'aire b de la section LM, et son moment d'inertie bh^2, qui a pour valeur

$$\frac{\pi BC^3}{4A^4}(2Ax - x^2).$$

Les équations du mouvement de l'ellipsoïde seront donc

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{3g\rho(2Ax - x^2)}{4A^3D}\zeta = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{15g\rho(C^2 - A^2)(2Ax - x^2)^2}{16DA^5(C^2 + A^2)}\theta = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on aurait $\rho = 2D$, il en résulterait $x = A$, et les équations du mouvement se réduiraient à

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{3g}{2A}\zeta = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{15g(C^2 - A^2)}{8A(C^2 + A^2)}\theta = 0.$$

Dans ce cas, les deux mouvements de translation et de rotation s'accompliraient dans la même période de temps si l'on avait $C = 3A$.

Équilibre d'un mélange de gaz pesants.

168. Considérons un cylindre vertical indéfini renfermant plusieurs gaz pesants, et fermé à sa base située à la surface de la terre, à la distance r de son centre. Supposons la température constante dans toute l'étendue du cylindre, et la pesanteur variable en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre.

L'expérience a montré que, lorsque plusieurs gaz sont placés dans une même enceinte et qu'ils sont sans action chimique les uns sur les autres, ils ne se superposent pas, par ordre de densité, comme les liquides; mais chacun d'eux se dispose comme s'il était absolument seul dans l'enceinte, et la pression et la densité en chaque point du mélange

sont les sommes de celles que l'on observerait dans l'équilibre de chacun de ces gaz, considéré isolément.

Soient p' et ρ' la pression et la densité de l'un des gaz, pour une valeur quelconque de z; p'_0, ρ'_0 leurs valeurs pour $z = 0$; g la pesanteur à la surface de la terre. On aura $p' = k'\rho'$, k' étant constant, puisque la température est la même en tous les points, et

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -\frac{gr^2}{(r+z)^2},$$

et, par suite,

$$dp' = -\rho' gr^2 \frac{dz}{(r+z)^2},$$

d'où, en remplaçant ρ' par $\frac{p'}{k'}$,

$$\frac{dp'}{p'} = -\frac{gr^2}{k'}\frac{dz}{(r+z)^2};$$

puis, en intégrant à partir de $z = 0$, et réduisant,

$$\mathrm{l}.\frac{p'}{p'_0} = -\frac{gr}{k'}\cdot\frac{z}{r+z},$$

ou

$$p' = p'_0\, e^{-\frac{gr}{k'}\cdot\frac{z}{r+z}},$$

et, par suite,

$$\rho' = \rho'_0\, e^{-\frac{gr}{k'}\cdot\frac{z}{r+z}}.$$

On trouverait de même pour un autre gaz,

$$p'' = p''_0\, e^{-\frac{gr}{k''}\cdot\frac{z}{r+z}},$$

$$\rho'' = \rho''_0\, e^{-\frac{gr}{k''}\cdot\frac{z}{r+z}},$$

et ainsi des autres. Si donc on désigne par p et ρ la pression et la densité qu'on observerait à une hauteur quelconque

dans le mélange de ces divers gaz, on aura

$$p = p'_0 e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}} + p''_0 e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}} + \ldots,$$

$$\rho = \rho'_0 e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}} + \rho''_0 e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}} + \ldots.$$

Il est bon de remarquer que les différents gaz ne seront pas mêlés exactement dans les mêmes proportions à différentes hauteurs; car les quantités ρ', ρ'',... ne sont pas respectivement dans les mêmes rapports que ρ'_0, ρ''_0,..., à moins que les coefficients k', k'',... ne soient égaux, ce qui n'a pas lieu en général. Mais ces coefficients étant généralement de très-grands nombres, le changement de proportion des gaz ne se ferait sentir qu'à des hauteurs considérables.

Mesure des hauteurs par les observations barométriques.

169. Supposons l'atmosphère en équilibre, et concevons qu'elle soit entièrement solidifiée, à l'exception d'un cylindre vertical partant de la surface de la terre et s'étendant indéfiniment au-dessus; la constitution de l'air dans son intérieur restera la même qu'auparavant, et il suffira de la déterminer pour connaître celle qu'avait d'abord l'atmosphère. Or, si nous pouvons calculer la pression du gaz dans ce cylindre en fonction de la hauteur, la connaissance de cette pression en un point quelconque conduira à celle de la hauteur de ce point; et d'ailleurs la pression pourra être déterminée au moyen du baromètre, en tenant compte de quelques circonstances accessoires. Occupons-nous donc de chercher la formule qui lie la hauteur à la pression dans ce cylindre atmosphérique en équilibre.

Supposons que la pesanteur varie en raison inverse du

carré de la distance au centre de la terre, et ne tenons pas compte du changement insensible qu'opérerait dans cette loi le changement de la force centrifuge dans l'étendue verticale où sont renfermés les points que nous comparerons. Soient g l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre au lieu que l'on considère, r la distance de ce point de la surface au centre de la terre, et g' sa valeur à la distance $r + z$; on aura

$$g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2}.$$

Soient θ la température d'un gaz, α le coefficient de dilatation des gaz pour une élévation de température de 1 degré centigrade, et k un coefficient constant pour un même gaz; on aura l'équation suivante :

$$p = k\rho(1 + \alpha\theta).$$

Cette même formule est évidemment applicable à un mélange de plusieurs gaz ou vapeurs dans des proportions invariables, le coefficient k ayant une certaine valeur moyenne entre celles qui se rapporteraient à chacun d'eux. C'est celle que nous adopterons pour l'air, parce que l'expérience a prouvé que la proportion des gaz qui le composent est la même à la surface de la terre et aux plus grandes hauteurs où l'on s'est élevé dans la verticale. Quant à la vapeur qui s'y trouve mêlée, et qui est en assez faible quantité à des hauteurs un peu considérables, il faudra aussi admettre qu'elle entre dans une proportion constante, qui sera une moyenne entre celles qu'on observerait aux deux points extrêmes dont on cherche la différence de hauteur.

Le coefficient α est à peu près le même pour tous les gaz ainsi que pour les vapeurs et égal à 0,00366. Mais, comme la quantité de vapeur contenue dans l'air augmente avec la température, et que la vapeur a une densité moindre que l'air, sous une même pression, il s'ensuit que, quand la

température s'élève, la densité de l'air doit diminuer un peu plus rapidement que ne l'indiquerait la formule précédente. On aura égard à cette circonstance en augmentant le coefficient α, et la valeur qu'on lui donne ordinairement à cet effet est 0,004.

Cela posé, il faudra faire, dans l'équation générale de l'équilibre des fluides,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g';$$

on aura

$$dp = -\frac{\rho g r^2 dz}{(r+z)^2},$$

ou, en remplaçant ρ par sa valeur en fonction de p,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

La température θ varie suivant une loi inconnue avec la hauteur, et l'on s'écartera peu de l'exactitude en lui supposant une valeur constante, égale à la moyenne des températures des deux points extrêmes que l'on considère. D'après cela, l'équation précédente donne, par l'intégration de ses deux membres,

$$1.\,p = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z)} + C,$$

C désignant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen des données relatives à la première des deux stations dont on demande la différence de hauteur.

Soient z_0 et p_0 les valeurs de z et de p à la première station; on aura

$$1.\,p_0 = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z_0)} + C,$$

et, en soustrayant les deux équations l'une de l'autre,

$$1.\,\frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z_0)} \cdot \frac{z-z_0}{r+z}.$$

Si l'on désigne par Z les hauteurs verticales au-dessus de la première station, c'est-à-dire si l'on pose $z - z_0 = Z$, et qu'on fasse $r + z_0 = R$, l'équation précédente devient

$$(1) \qquad \mathrm{l}.\frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{kR(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{Z}{R+Z}.$$

Soient t_0, t les températures de l'air aux deux stations, la valeur de θ sera $\frac{t_0+t}{2}$; mais, pour ne pas compliquer l'équation, nous continuerons à la désigner par θ. Quant au rapport $\frac{p_0}{p}$, il peut s'exprimer au moyen des hauteurs barométriques correspondantes aux pressions p, p_0, pourvu qu'on y ramène le mercure à une même température, et que, de plus, on ait égard à la variation de la pesanteur en passant d'une station à l'autre.

En effet, en désignant par D la densité du mercure à o degré, par h_0, h les hauteurs barométriques correspondantes aux deux stations et ramenées à la même température, par exemple à o degré, et par g_0, g' les valeurs de la pesanteur à ces deux stations, on aura

$$p_0 = g_0 D h_0, \quad p = g' D h, \quad \frac{g_0}{g'} = \frac{(R+Z)^2}{R^2} = \left(1+\frac{Z}{R}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\left(1+\frac{Z}{R}\right)^2.$$

Substituant dans l'équation (1) et remplaçant les logarithmes népériens par les logarithmes ordinaires, divisés par le module M dont la valeur est 0,4342945, on obtient

$$(2) \quad Z = \frac{k(1+\alpha\theta)R^2}{Mgr^2}\left[\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1+\frac{Z}{R}\right)\right]\left(1+\frac{Z}{R}\right).$$

170. La correction qu'il faut faire aux indications du baromètre est très-facile. Soient T_0, T les températures du

mercure aux deux stations, lesquelles sont indiquées par des thermomètres adaptés au baromètre; et H_0, H les hauteurs indiquées par le baromètre.

Le mercure se dilatant de $\frac{1}{5550}$ de son volume à 0 degré, pour chaque degré du thermomètre centigrade, les valeurs que prend sa densité aux températures 0 et T_0 sont entre elles dans le rapport de $1+\frac{T_0}{5550}$ à l'unité. Or, la pression de l'air est mesurée par le poids d'une colonne de mercure ayant l'unité pour base, et pour hauteur celle qu'indique le baromètre vertical; de sorte que, pour une même pression, cette hauteur sera en raison inverse de la densité du mercure. Donc entre H_0 et h_0, on aura la relation

$$H_0 = h_0\left(1+\frac{T_0}{5550}\right);$$

on aura de même

$$H = h\left(1+\frac{T}{5550}\right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H}\cdot\frac{1+\frac{T}{5550}}{1+\frac{T_0}{5550}},$$

ou, en négligeant les puissances de $\frac{T_0-T}{5550}$, supérieures à la première,

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right)}.$$

On voit donc qu'il suffira de prendre $h_0 = H_0$ et de remplacer h par

$$H\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right).$$

Nous laisserons, pour plus de simplicité, dans la for-

mule (2), les quantités h_0 et h qui sont maintenant déterminées, d'après les observations faites aux deux stations.

Il y a encore une autre correction à faire à la formule (2), et qui est relative à la latitude du lieu de l'observation.

Nous avons désigné par g la pesanteur considérée à Paris, et sa valeur est

$$g = 9{,}80896.$$

La formule (2) ne se rapporterait donc qu'à des observations faites à Paris. Pour qu'elle soit applicable dans tous les lieux, il faut y substituer à g l'expression suivante :

$$g \cdot \frac{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi_1},$$

ψ désignant la latitude du lieu de l'observation, et ψ_1 celle de Paris.

En faisant cette substitution dans l'équation (2), le second membre aura un coefficient purement numérique, que l'on peut calculer directement, ou déduire de l'équation même, dans laquelle on substituerait à Z la valeur résultant de mesures trigonométriques. Ces deux procédés donnent sensiblement le même résultat; si, de plus, on suppose que la première station ait lieu sensiblement au niveau de la mer, auquel cas on a

$$z_0 = 0, \quad R = r, \quad Z = z,$$

la formule (2) deviendra

$$(3)\quad z = \frac{18336^{m}(1 + \alpha\theta)}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi}\left[\log \frac{h_0}{h} + 2 \log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

171. Pour calculer la valeur de z, on commencera par substituer à θ et ψ les valeurs données par les observations; et si, pour abréger, on fait

$$\frac{18336(1 + \alpha\theta)}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi} = A,$$

on aura

$$z = A\left[\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]\left(1+\frac{z}{r}\right).$$

Négligeant d'abord $\frac{z}{r}$ par rapport à 1, on aura une première valeur approchée, que nous désignerons par z_1, et qui sera

$$z_1 = A\log\frac{h_0}{h};$$

pour avoir une seconde valeur plus approchée z_2, on substituera z_1 à z dans le second membre, et l'on aura

$$z_2 = A\left[\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1+\frac{z_1}{r}\right)\right]\left(1+\frac{z_1}{r}\right).$$

On substituera ensuite cette nouvelle valeur à z, dans le second membre de la même équation, et l'on aura encore une autre valeur plus approchée pour z. On pourrait continuer indéfiniment ces approximations successives; mais, le plus ordinairement, on pourra s'arrêter à z_2.

Lorsque $\frac{z}{r}$ est très-petit, on peut le négliger entièrement dans la formule (3); mais alors il est nécessaire d'augmenter un peu le coefficient 18336. M. Ramond a conclu d'un grand nombre d'observations faites dans le midi de la France, qu'il fallait le remplacer par 18393; comme en même temps $\cos 2\psi$ était sensiblement nul, il employait la formule très-simple

$$z = 18393\,(1 + 2\theta)\log\frac{h_0}{h}.$$

HYDRODYNAMIQUE.

172. L'Hydrodynamique a pour objet le mouvement des fluides.

Pour se faire une idée exacte du problème considéré de la manière la plus générale, il faut supposer qu'à un instant déterminé, que l'on prendra par exemple pour origine des temps, on connaisse la position de toutes les molécules qui composent le fluide, et les vitesses dont elles sont animées; que, de plus, on donne les forces extérieures qui agissent sur tous les points du fluide, les pressions et les autres conditions relatives à ses limites dans tous les sens. Cela posé, il s'agit de déterminer le mouvement de chaque molécule en particulier, c'est-à-dire de trouver l'expression de ses trois coordonnées en fonction du temps, et de connaître, de plus, la pression et la densité en un point quelconque et à un instant quelconque.

Les coordonnées x, y, z d'une molécule déterminée sont des fonctions de la seule variable t. Mais ces fonctions changent d'une molécule à l'autre et dépendent, par conséquent, des coordonnées a, b, c du point où se trouvait la molécule que l'on considère, à l'origine du mouvement. On doit donc regarder x, y, z comme des fonctions des quatre variables indépendantes a, b, c, t; et si l'on peut trouver l'expression générale de ces trois fonctions, on connaîtra exactement le mouvement de telle molécule que l'on voudra, à partir de sa position initiale.

173. Si le problème était résolu, et que l'on connût ces trois fonctions de a, b, c, t, on en pourrait déduire a, b, c en fonction de x, y, z, t, et, par conséquent, toute fonction des variables indépendantes a, b, c, t peut être considérée comme fonction des quatre variables indépendantes x, y, z, t. Ainsi, par exemple, les composantes de la vitesse d'un point du fluide, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, que nous représenterons respectivement par u, v, w, étant dépendantes de a, b, c, t, pourront être regardées comme dépendantes de x, y, z, t; et c'est d'ailleurs ce que l'on conçoit à priori; car, si l'on considère un point quelconque du fluide, dont les coordonnées x, y, z restent constantes, les quantités u, v, w relatives à ce point changeront avec le temps, et sont, par conséquent, des fonctions de t. De même, si on laisse y, z et t constants et qu'on fasse varier x, c'est-à-dire si au même instant on considère les différents points d'une parallèle à l'axe des x; u, v, w varieront encore; elles sont donc fonction de la variable indépendante x, et ainsi des autres; d'où il résulte que u, v, w sont des fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t. On en dirait autant de toute fonction de a, b, c, t.

174. Il est facile de voir que le problème que l'on se propose serait résolu si l'on pouvait déterminer complétement u, v, w en fonction de x, y, z, t; car, pour connaître le mouvement d'une molécule en particulier, il suffirait de considérer x, y, z comme des fonctions de t seulement, et de poser

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w;$$

on aurait ainsi trois équations différentielles entre x, y, z, t, après que l'on aurait remplacé u, v, w par leurs valeurs; en les intégrant, on connaîtrait x, y, z en fonction

de t, et l'on déterminerait les trois constantes que cette intégration introduirait en exprimant que, pour $t = 0$, x, y, z prennent les valeurs des coordonnées initiales de la molécule que l'on considère.

175. *Équations du mouvement des fluides.* — Soient $X dm$, $Y dm$, $Z dm$ les composantes de la force appliquée à la molécule dont la masse est dm; u, v, w les composantes de sa vitesse, et u', v', w' les dérivées par rapport à t, des quantités respectives u, v, w considérées comme relatives au mouvement d'une molécule déterminée, et, par conséquent, comme des fonctions de la seule variable t. Nous ne pouvons représenter ces dérivées par $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ parce qu'on les confondrait avec les dérivées partielles de u, v, w par rapport à t. Soient enfin p la pression et ρ la densité, qui peuvent varier avec x, y, z, t. On formera d'abord trois équations du mouvement du fluide, au moyen du principe de d'Alembert, en observant que le fluide serait en équilibre si une molécule quelconque dm était sollicitée par la force ayant pour composantes

$$(X - u')\,dm, \qquad (Y - v')\,dm, \qquad (Z - w')\,dm,$$

d'où résultent les trois équations

$$\frac{dp}{dx} = \rho\,(X - u'), \quad \frac{dp}{dy} = \rho\,(Y - v'), \quad \frac{dp}{dz} = \rho\,(Z - w').$$

Pour obtenir les expressions de u', v', w', il faut observer que u, v, w doivent être différentiées en regardant x, y, z comme les fonctions de t qui se rapportent au mouvement de la molécule dm, et que, par conséquent, les accroissements de x, y, z, correspondants à l'accroissement dt du temps, ont pour valeurs

$$dx = u\,dt, \qquad dy = v\,dt, \qquad dz = w\,dt.$$

On aura, d'après cela,

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$

$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz},$$

et les trois équations précédentes deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Ces trois équations ne suffisent pas pour la détermination des cinq fonctions p, ρ, u, v, w. Il en faut deux de plus, à moins que ρ ne soit constant, et, dans ce cas, il n'en resterait qu'une à trouver. Nous allons voir comment on peut trouver ces équations d'après la condition que le fluide reste continu.

176. Concevons que l'espace occupé par le fluide soit partagé en parallélipipèdes infiniment petits dx, dy, dz. Après le temps dt, ils doivent se trouver encore remplis par le fluide, excepté peut-être ceux qui se trouveraient à la surface libre, et, par conséquent, l'accroissement de la densité dans chacun d'eux sera égal à l'accroissement de la masse qui y était renfermée, divisée par le volume. Pour exprimer cette condition, il faut chercher l'excès de la masse de fluide qui est entrée dans un quelconque d'entre eux, sur la masse qui en est sortie pendant le temps dt.

Soient x, y, z (*fig.* 12) les coordonnées du sommet M

de ce parallélipipède; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ celles du sommet opposé S; u, v, w les composantes de la vitesse du point situé en M après le temps t, et ρ la densité en ce point au même instant.

La direction de la vitesse variant d'une manière continue, s'il entre du fluide par une face, il en sortira par la face opposée, et si l'on calcule l'excès de la masse de la première quantité sur la seconde pour les trois couples de faces parallèles, leur somme sera l'accroissement de la masse renfermée dans le parallélipipède.

Considérons d'abord la face MPQR et sa parallèle. Si ρ et u étaient constants dans l'étendue de chacune d'elles, la masse introduite par la première serait

$$\rho u dy dz dt,$$

la masse sortie par la seconde serait

$$\left[\rho u + \frac{d(\rho u)}{dx} dx\right] dy dz dt,$$

et l'excès aurait pour expression

$$-\frac{d(\rho u)}{dx} dx dy dz dt.$$

Or, on peut admettre qu'il en est ainsi; car, si l'on considère deux points T, V pris respectivement dans les deux faces et situés sur une parallèle à l'axe des x, la différence des valeurs de ρu en ces deux points ne surpasse la différence des valeurs de ρu aux points M et N, que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, puisqu'il suffirait de remplacer dans cette dernière les coordonnées de M par celles de T pour obtenir les expressions de la première.

De même, l'excès de la quantité de masse entrée par les deux faces $dx dz$, $dx dy$ sur celle qui est sortie par les faces

parallèles, est exprimé respectivement par

$$-\frac{d(\rho v)}{dy}dx\,dy\,dz\,dt, \quad -\frac{d(\rho w)}{dz}dx\,dy\,dz\,dt.$$

Divisant la somme des trois excès par le volume $dx\,dy\,dz$, on connaîtra l'accroissement de la densité du liquide contenu dans le parallélipipède, ou de la densité au point dont les coordonnées sont x, y, z. Ce sera donc la différentielle partielle de la densité par rapport au temps, et l'on aura, par conséquent, l'équation

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}=0.$$

Examinons maintenant de quelle manière elle doit être interprétée dans les différents cas que peuvent présenter les fluides.

177. S'il s'agit d'un liquide, c'est-à-dire d'un fluide incompressible, et que sa densité soit la même en tous les points, et indépendante du temps, l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Dans ce cas, il n'y a que quatre fonctions inconnues p, u, v, w, puisque ρ est donné. Les équations (1) et (3) suffisent donc pour leur détermination.

178. Si l'on considère maintenant un liquide hétérogène, la densité de chaque molécule est invariable; mais ρ n'en est pas moins une fonction de x, y, z, t. Pour exprimer que cette fonction reste constante pour une même molécule, il faut chercher sa différentielle totale en exprimant que dx, dy, dz ont les valeurs correspondantes au mouvement de cette molécule, et l'égaler à zéro. On ob-

tient ainsi

$$(4) \qquad \frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0,$$

ce qui réduit l'équation (2) à

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Dans ce cas, il y a cinq fonctions à déterminer, savoir, p, ρ, u, v, w, et un même nombre d'équations (1), (4), (5).

179. S'il s'agit d'un fluide compressible dont la température est constante, on a entre p et ρ la relation

$$p = k\rho,$$

qui, jointe aux équations (1) et (2), détermine les cinq fonctions inconnues.

180. *Conditions relatives à la surface.* — Les équations que nous avons obtenues jusqu'ici s'appliquent à tous les points de l'intérieur du fluide; et s'il est indéfini, il ne reste à y joindre que les conditions relatives à l'état initial. Mais si le fluide est terminé, il existe des équations particulières pour les points qui se trouvent à sa surface. On suppose ordinairement que les points qui étaient d'abord en contact avec une paroi mobile ou immobile, y restent indéfiniment, et que les points qui appartenaient primitivement à la surface libre ne cessent jamais d'en faire partie. Ces hypothèses restreignent les déplacements; et, malgré cela, il est encore bien peu de cas où les calculs puissent s'effectuer complétement.

Soit $F(x, y, z, t) = 0$ l'équation d'une surface sur laquelle un point du fluide doit constamment se trouver. Supposons que, pour une certaine valeur de t, ses coordonnées y satisfassent, et que t croisse de dt; ces coordon-

nées croîtront de

$$udt, \quad vdt, \quad wdt,$$

et ces accroissements devront satisfaire à l'équation différentielle de la surface, quand on les substitue à dx, dy, dz, ce qui donne la condition

$$\frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0.$$

Si la paroi est fixe, le terme $\frac{dF}{dt}$ disparaît.

Cette équation devra avoir lieu pendant toute la durée du mouvement pour les points qui se trouvaient primitivement en contact avec la paroi dont il s'agit; et il en existera de semblables pour toutes les parties de la surface qui ne sont pas libres.

181. Les points de la surface libre sont soumis à l'action d'une pression connue, qui est ordinairement la même en tous ces points, mais qui peut varier avec le temps. Si on la désigne par P, l'équation de cette surface sera

$$p - P = 0,$$

d'où l'on conclut la condition suivante, pour les points qui s'y trouvent :

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = \frac{dP}{dt}.$$

Ces différentes équations relatives aux limites du fluide concourent, avec l'état initial, à la détermination des fonctions arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles partielles.

182. Lorsque u, v, w sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une fonction φ de x, y, z, t, on peut réduire les équations (1) à une seule, et la solution de la

question est ramenée à la détermination de φ, puisqu'on en déduira u, v, w par des différentiations.

En ne considérant que les variables x, y, z dans φ, on aura, d'après l'hypothèse,

$$udx + vdy + wdz = d\varphi.$$

Supposons, de plus, que X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une fonction V, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = d\mathrm{V}.$$

Cela posé, les équations (1) peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{d\mathrm{V}}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{d\mathrm{V}}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{d\mathrm{V}}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Si l'on multiplie respectivement ces équations par dx, dy, dz, et qu'on les ajoute, on obtient

$$(6)\qquad \frac{dp}{\rho} = d\mathrm{V} - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

toutes les différentielles étant prises par rapport à x, y, z, en considérant t comme constant.

Les deux membres de cette équation pourront s'intégrer par rapport à x, y, z toutes les fois que ρ sera une fonction connue de p, ou aura une valeur constante.

183. Dans ce dernier cas, qui est celui d'un liquide homogène, on obtient

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{V} - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

il faudrait ajouter une fonction arbitraire du temps au second membre, mais on peut la regarder comme renfermée dans la fonction φ, et il est inutile de l'écrire.

L'équation de continuité se réduit, dans ce cas, à

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

ou

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Cette équation fera connaître φ en fonction de x, y, z; et quand les fonctions arbitraires auront été déterminées, on connaîtra u, v, w par la différentiation de la fonction φ.

184. Dans le cas d'un fluide aériforme dont la température est constante, on a $p = k\rho$, et le premier membre de l'équation (6) devient $k\frac{dp}{p}$. On obtient donc, en intégrant,

$$k\,\text{l}.\,p = \text{V} - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

d'où l'on peut tirer p en fonction de φ.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0,$$

et, en y remettant la valeur de p tirée de la précédente, on aura une équation qui déterminera φ et, par suite, u, v, w. Dans le cas où les mouvements des points du fluide seraient assez rapides pour que la température s'élevât et s'abaissât successivement en chaque point, la force élastique ne serait plus simplement proportionnelle à ρ, elle dépendrait de l'accroissement de température, qui peut

être regardé comme proportionnel à l'accroissement de la densité; p dépendrait donc encore de ρ, et réciproquement. Le premier membre de l'équation (6) pourrait encore être intégré, et l'on agirait comme dans le cas précédent.

185. Si les fonctions u, v, w sont les dérivées partielles d'une fonction de x, y, z pour une valeur quelconque de t, il faut qu'elles le soient d'abord pour $t = 0$; ce que l'on reconnaîtra facilement, puisque leurs valeurs initiales sont données en fonction de x, y, z. Or, Lagrange a fait voir que, quand ces conditions sont remplies à une certaine époque, elles le sont à un instant quelconque du mouvement; d'où il résulte que, si l'on reconnaît qu'elles le sont dans l'état initial, elles le seront indéfiniment, et les calculs précédents seront applicables.

Nous allons démontrer cette importante proposition.

Pour cela, nous partagerons le temps en intervalles infiniment petits, et nous calculerons de combien augmente l'expression $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ dans un de ces intervalles, en déterminant les accroissements que prennent u, v, w dans le même temps, d'après les équations générales du mouvement des fluides. Or, il est clair que si $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est à chaque instant la différentielle d'une fonction de x, y, z, il est nécessaire que la quantité dont elle augmente soit toujours elle-même une différentielle exacte; et réciproquement, si à une certaine époque cette expression est une différentielle exacte et que tous ses accroissements infiniment petits successifs soient eux-mêmes des différentielles exactes, il en sera de même de leur somme et, par conséquent, de l'expression $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ à une époque quelconque.

Soient donc u_1, v_1, w_1 les valeurs de u, v, w à une certaine époque pour laquelle $t = t_1$, et admettons que l'on ait

$$u_1\,dx + v_1\,dy + w_1\,dz = d\varphi_1,$$

φ_1 étant une fonction des trois variables indépendantes x, y, z. En considérant u, v, w comme des fonctions de x, y, z, t, les valeurs qu'elles auront pour $t = t_1 + \varepsilon$ pourront être développées par rapport aux puissances de ε, et si l'on suppose cet accroissement infiniment petit, on devra se borner aux deux premiers termes, et l'on aura

$$u = u_1 + u'\varepsilon, \quad v = v_1 + v'\varepsilon, \quad w = w_1 + w'\varepsilon,$$

u', v', w' étant des fonctions de x, y, z, qui seront les dérivées partielles de u, v, w par rapport à t et relatives à $t = t_1$.

On déduit de là

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = u_1\,dx + v_1\,dy + w_1\,dz + \varepsilon(u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz).$$

Donc, si $u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz$ est une différentielle exacte, il en sera de même de $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ à l'époque pour laquelle $t = t_1 + \varepsilon$. Or, les équations (1), considérées à l'époque où $t = t_1$, deviennent

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - u' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - v' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - w' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}.$$

Multiplions ces équations respectivement par dx, dy, dz, et ajoutons-les. Le premier membre $\frac{dp}{\rho}$ sera une différentielle exacte, soit dans le cas des liquides homogènes, parce que ρ est alors constant; soit dans le cas des gaz, parce que ρ est une fonction de p, la température étant supposée invariable. On peut donc remplacer $\frac{dp}{\rho}$ par dP, P étant une cer-

taine fonction de x, y, z; et, en supposant d'ailleurs que les forces extérieures soient telles, que $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}\,dx + \mathrm{Z}dz$ soit la différentielle d'une certaine fonction V de x, y, z, on obtiendra

$$dP = dV - (u'dx + v'dy + w'dz)$$
$$- \frac{1}{2} d\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right],$$

d'où l'on tirera

$$u'dx + v'dy + w'dz$$
$$= d\left\{V - P - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right]\right\}.$$

Ainsi $u'dx + v'dy + w'dz$ est la différentielle d'une certaine fonction des trois variables indépendantes x, y, z. Donc, si $udx + vdy + wdz$ en est une, à une certaine époque, elle le sera encore après que le mouvement du fluide se sera opéré en vertu de toutes les actions et toutes les circonstances, pendant un temps infiniment petit. Partant de l'état du fluide à cette nouvelle époque, comme de la précédente, on prouvera de même que $udx + vdy + wdz$ sera encore une différentielle exacte après un nouvel intervalle de temps infiniment petit, et ainsi de suite indéfiniment.

Il suit de là que, si cette condition est remplie dans l'état initial, ce que l'on pourra toujours vérifier immédiatement, on peut être assuré qu'elle le sera à toute époque du mouvement. Si elle ne l'était pas dans l'état initial, il est clair qu'elle ne pourrait l'être à toute époque.

Il est bon de remarquer que la condition dont il s'agit sera remplie toutes les fois que les vitesses seront nulles en tous les points dans l'état initial; car alors on a

$$udx + vdy + wdz = 0,$$

ce qui est une différentielle exacte.

186. Dans le mouvement très-simple d'un liquide qui tourne uniformément autour d'un axe fixe, sans que ses points changent de position relative, $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ n'est pas une différentielle exacte; car, en désignant par ω la vitesse angulaire constante, et prenant l'axe de rotation pour axe des z, on aura

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$

et, par suite,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \omega\,(x\,dy - y\,dx),$$

expression qui n'est pas une différentielle exacte. Le cas dont il s'agit ne peut donc être traité par le procédé particulier que nous avons exposé, et il faut recourir aux équations générales.

On a, dans ce cas,

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad w = 0,$$

et les équations (1) deviennent

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dp}{\rho} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy),$$

équation qui ne diffère pas de celle que nous avons trouvée dans l'Hydrostatique, n° **141**.

Mouvement d'un liquide dans une hypothèse particulière.

187. Lorsqu'un liquide homogène, renfermé dans un vase, s'écoule par un orifice pratiqué dans la base hori-

zontale, et très-petit par rapport aux sections horizontales du vase, l'expérience montre que les molécules situées dans une même tranche horizontale, à un certain instant, y restent constamment, tant qu'elles ne sont pas très-voisines de l'orifice. On peut négliger les vitesses horizontales, lorsque les sections varient peu dans toute la hauteur du vase, et ont des dimensions très-petites par rapport à cette hauteur; il n'y a plus alors que deux inconnues, la vitesse verticale et la pression. Ces suppositions, connues sous le nom d'*hypothèse du parallélisme des tranches*, sont celles que nous admettons dans la question que nous allons traiter. Prenons l'axe des x dans la direction de la pesanteur, nous aurons

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad X = g,$$

et les équations (1) se réduisent, les deux dernières à

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{dp}{dz} = 0,$$

ce qui indique que la pression est la même pour tous les points d'une même tranche horizontale, et la première à

$$(a) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho\left(g - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx}\right).$$

L'équation de continuité (3) ne saurait être employée dans le cas actuel, parce qu'elle renferme les dérivées de u, v, w; et quoique v et w soient très-petits par rapport à u, on ne peut dire que leurs dérivées puissent être négligées par rapport à celle de u. Mais on exprimera bien simplement la continuité, en égalant la quantité de liquide qui passe par une tranche quelconque à celle qui sort par l'orifice pendant un même temps infiniment petit. En effet, désignons par ω l'aire de la section faite dans le vase, à une distance x de l'origine; par Ω l'aire de l'orifice, et par U la

vitesse avec laquelle le liquide y passe; les quantités de liquide qui passent par les sections ω et Ω pendant le même intervalle dt sont respectivement $\omega u dt$ et $\Omega U dt$; d'où résulte la condition

$$\omega u = \Omega U,$$

ou

$$(b) \qquad u = \frac{\Omega U}{\omega};$$

les valeurs de u et U se rapportant à la même valeur de t, U est une fonction de t seulement, ω est une fonction de x donnée par la forme du vase, et u est une fonction de x et de t. Si l'on y fait varier t seulement, on a les valeurs successives de la vitesse de différentes couches, au moment où elles viennent de passer par une même section. Si x seul varie dans u, on a les vitesses de différentes couches au même instant, et si l'on y fait varier à la fois x et t sans établir de dépendance entre eux, on a la vitesse de la tranche qui passe à cette autre époque par une autre section. Enfin, si l'on veut connaître la vitesse qu'aura, après le temps dt, la tranche qui, pour une valeur donnée de t et de x, a une vitesse u, il faudra faire varier t de dt, et x de dx, en supposant $dx = u\,dt$.

Au moyen de l'équation (b) on peut éliminer u de l'équation (a) et y introduire U, qui offre de l'avantage, en ce qu'elle n'est fonction que d'une seule variable t.

On obtient ainsi

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(g - \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dx}\right).$$

Multipliant les deux membres de cette équation par dx, et les intégrant par rapport à x, à partir de la surface supérieure, on obtient

$$p = g\rho x - \rho\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{\omega} - \frac{\rho\Omega^2 U^2}{2\omega^2} + C;$$

l'intégrale $\int \frac{dx}{\omega}$ peut être supposée effectuée dans chaque cas particulier, puisque ω est une fonction donnée de x; C est une quantité arbitraire indépendante de x, et qui peut dépendre de t.

Cela posé, il y a à considérer deux cas très-différents : celui où le niveau du liquide serait maintenu à la même hauteur, et celui où il s'abaisserait par l'écoulement du liquide qui ne serait pas renouvelé; nous allons les examiner successivement.

188. Soient P la pression constante exercée sur la surface supérieure du liquide, P′ la pression exercée sur le liquide qui sort du vase; on aura sensiblement $P' = P$ lorsque tout l'appareil sera compris dans un même milieu gazeux. Soient h la distance du niveau à l'origine des x, et l sa distance à l'orifice.

Déterminons la constante de l'équation précédente de manière que l'on ait $p = P$ pour $x = h$, nous trouverons, en prenant l'intégrale à partir de h,

$$C = P - g\rho h + \rho \frac{\Omega^2 U^2}{2 O^2},$$

O désignant la valeur de ω au niveau du liquide.

Il en résultera

$$(c)\quad p = P + \rho g(x - h) - \rho\Omega \frac{dU}{dt} \int_h^x \frac{dx}{\omega} - \frac{\rho \Omega^2 U^2}{2} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right);$$

si nous faisons

$$x = h + l,$$

il en résultera

$$p = P', \quad \omega = \Omega;$$

si nous posons

$$\int_h^{h+l} \frac{dx}{\omega} = m, \quad P - P' = g\rho\delta,$$

nous obtiendrons

$$(d) \qquad g(l+\delta) = m\Omega \frac{dU}{dt} + \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{U^2}{2};$$

posant

$$1 - \frac{\Omega^2}{O^2} = \alpha^2 \quad \text{et} \quad 2g(l+\delta) = k^2,$$

α sera une quantité très-peu différente de l'unité, et l'équation précédente donne, en la résolvant par rapport à dt,

$$dt = \frac{2m\Omega\, dU}{k^2 - \alpha^2 U^2};$$

intégrant les deux membres, il vient

$$t = \frac{m\Omega}{k\alpha} \log \frac{1}{C}\left(\frac{k+\alpha U}{k-\alpha U}\right),$$

C étant une constante arbitraire que l'on déterminera d'après la valeur initiale de U. En supposant les vitesses nulles lorsque $t = 0$, on a $C = 1$, et l'équation résolue par rapport à U devient

$$U = \frac{k}{\alpha} \frac{1 - e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}{1 + e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}};$$

U étant déterminé, on connaîtra u par l'équation $u = \frac{\Omega U}{\omega}$, et p par l'équation (c).

La valeur de U montre qu'après un certain temps, d'autant plus court que Ω sera plus petit, les exponentielles sont sensiblement nulles, et que par conséquent la valeur de U converge vers la limite $\sqrt{\frac{2g(l+\delta)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$, et u et p vers des limites correspondantes.

Si l'on néglige le carré de $\frac{\Omega}{O}$, la limite de la vitesse à l'orifice sera $\sqrt{2g(l+\delta)}$.

Et enfin, si $\delta = 0$; c'est-à-dire si la pression extérieure est la même à l'orifice et au niveau du liquide, la vitesse à l'orifice devient $\sqrt{2gl}$. *Elle est donc la même que celle qu'acquerrait un corps pesant, en tombant dans le vide d'une hauteur égale à celle du liquide dans le vase.*

La vitesse U étant devenue constante, on a $\frac{dU}{dt} = 0$, et l'équation (c) se réduit à

$$p = P + \rho g(x-h) - \rho \frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Or, dans l'état d'équilibre, la pression serait égale à

$$P + \rho g(x-h).$$

Elle est donc moindre dans l'état de mouvement pour les sections telles, que l'on ait $\omega < O$, c'est-à-dire pour celles qui ont des aires moindres que celle de la surface libre du liquide; elle est, au contraire, plus grande que dans l'état d'équilibre pour celles dont les aires sont plus grandes que O.

Si l'on veut connaître le volume de liquide qui est sorti du vase au bout du temps t, il suffira d'intégrer $\Omega U dt$ entre 0 et t. Si l'on désigne ce volume par V, on trouve facilement

$$V = \frac{2m}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}} \log \frac{e^{\frac{k\alpha t}{2m\Omega}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2m\Omega}}}{2}.$$

Au bout d'un certain temps, on pourra négliger la seconde exponentielle, et l'on aura sensiblement, en remettant

pour k sa valeur $\sqrt{2g(l+\delta)}$,

$$V = \frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2}-\frac{1}{O^2}}} \cdot t - \frac{2m \log 2}{\frac{1}{\Omega^2}-\frac{1}{O^2}}.$$

Le premier terme est le volume qui serait sorti si la vitesse avait été, dès l'origine, égale à sa limite

$$\frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

189. Passons maintenant au cas où le liquide n'étant pas renouvelé, le niveau s'abaisse, et h est une fonction inconnue de t.

Les équations (a), (b), (c), (d) ont toujours lieu; mais m et O sont maintenant des fonctions connues de h, et l dépend de h par l'équation

$$h + l = a,$$

a désignant la distance constante de l'orifice à l'origine des x. Il faudra à ces équations en ajouter une qui exprime que la quantité de liquide écoulé pendant un intervalle quelconque dt est égale au volume compris entre les deux niveaux correspondants au commencement et à la fin de cet intervalle. Cette équation est

$$(e) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\Omega U}{O}.$$

L'équation (d) devient, en remplaçant l par $a - h$,

$$(f) \qquad g(a+\delta-h) = m\Omega \frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2}-\frac{1}{O^2}\right).$$

Il reste donc à intégrer le système des deux équations simultanées (e) et (f).

Si l'on élimine entre elles dt, on obtient

$$g(a+\delta-h)=\frac{m\Omega^2}{O}U\frac{dU}{dh}+\frac{\Omega^2U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2}-\frac{1}{O^2}\right),$$

ou, en posant $U^2=2gz$,

$$\frac{dz}{dh}+\frac{O}{m}\left(\frac{1}{\Omega^2}-\frac{1}{O^2}\right)z+\frac{O}{m\Omega^2}(h-a-\delta)=0,$$

équation linéaire du premier ordre par rapport à z, et que l'on pourra toujours intégrer dans chaque cas, puisque O et m seront des fonctions connues de h.

Lorsque z sera connu en fonction de h, on connaîtra U, et par suite t d'après l'équation (e); et réciproquement h et U seront connus en fonction de t. La valeur de u sera donnée par l'équation (b), et celle de p par l'équation (c). La quantité de liquide écoulé se déterminera en calculant le volume du vase, compris entre le niveau initial et le niveau variable, et la durée de l'écoulement total s'obtiendra en faisant $h=a$ dans la valeur de t.

190. Si l'on suppose Ω extrêmement petit par rapport aux sections horizontales du vase, l'équation (d) se simplifie beaucoup. En effet, on peut négliger $\frac{\Omega}{O}$ et $m\Omega$, tant dans l'hypothèse d'un niveau variable que d'un niveau constant, à moins toutefois que $\frac{dU}{dt}$ ne soit très-grand, ce qui a lieu au commencement du mouvement. On obtient ainsi

$$U^2=2g(l+\delta),$$

ce qui donne pour U la vitesse limite que nous avions trouvée pour t infini, dans le premier cas.

Dans la même hypothèse d'un orifice très-petit, les résultats sont sensiblement les mêmes, quelle que soit la direction de son plan.

Mais, dans tous les cas, la vitesse donnée par l'expérience, et que l'on calcule d'après l'aire de l'orifice et la quantité d'eau écoulée, est moindre que celle que donne cette théorie dans le rapport de 0,62 à l'unité. Ce rapport étant sensiblement constant, les vitesses réelles sont toujours entre elles comme les racines carrées des hauteurs de pression.

Du mouvement permanent d'un liquide.

191. Lorsque l'on entretient le niveau d'un liquide à une hauteur constante, on obtient, au bout d'un certain temps, un état *permanent* dans lequel toutes les circonstances restent les mêmes au même point, et ne varient que d'un point à un autre. Ainsi, en un point quelconque, la vitesse du liquide sera constante en grandeur et en direction, et par conséquent deux molécules qui à des époques différentes auront occupé une même position, parcourront la même trajectoire et d'une manière identique.

En prenant l'axe des x dans le sens de la pesanteur, les équations fournies par le principe de d'Alembert seront

$$\frac{dp}{dx} = \rho(g - u'), \quad \frac{dp}{dy} = -\rho v', \quad \frac{dp}{dz} = -\rho w',$$

u', v', w' étant les dérivées, par rapport au temps, des composantes de la vitesse d'une molécule en un point quelconque. Désignons par dx, dy, dz les accroissements qu'ont pris, après le temps dt, les coordonnées de la molécule qui était située en ce point; multiplions respectivement les équations précédentes par dx, dy, dz, et ajoutons-les, nous obtiendrons

$$dp = g\rho dx - \rho(u'dx + v'dy + w'dz),$$

ou, en désignant par V la vitesse de cette molécule en un

point quelconque de sa trajectoire,

$$dp = g\rho dx - \frac{\rho}{2} d.V^2;$$

intégrant entre deux points quelconques de cette trajectoire, correspondants aux abscisses x_0, x, il vient

$$(a) \qquad p - p_0 = g\rho(x - x_0) - \frac{\rho}{2}(V^2 - V_0^2),$$

p_0, V_0 étant les valeurs de p, V, au premier de ces deux points. Cette équation va nous conduire à un résultat remarquable, déjà obtenu dans la discussion de la question précédente où l'on admettait des hypothèses plus particulières que celles que nous admettons ici. En effet, supposons que la surface libre du liquide soit rigoureusement plane et soumise en tous ses points à une pression égale et constante P, et comptons les x à partir de ce plan. Si dans l'équation (a) nous faisons

$$x_0 = 0, \quad p_0 = P,$$

le premier des deux points que l'on considérait sur la trajectoire sera pris à la surface supérieure du liquide; on aura alors

$$p - P = g\rho x - \frac{\rho}{2}(V^2 - V_0^2).$$

Or, si le vase est percé d'un très-petit orifice à la partie inférieure, à une distance h au-dessous du niveau supérieur, on pourra admettre que dans toute l'étendue de cet orifice la vitesse de tous les points est la même; de sorte que pour $x = h$ il n'y ait qu'une seule valeur pour V. Si, de plus, on regarde la pression extérieure comme moindre qu'à la partie supérieure d'une quantité $g\rho\delta$, l'équation précédente devient, en y faisant $x = h$,

$$-g\rho\delta = g\rho h - \frac{\rho}{2}(V^2 - V_0^2),$$

ou

$$V^2 - V_0^2 = 2g(h + \delta).$$

Soit k le rapport de l'aire de l'orifice à l'aire de la section du vase par le plan du niveau supérieur; on aura

$$V_0 = kV, \quad \text{et, par suite,} \quad V^2(1 - k^2) = 2g(h + \delta),$$

d'où

$$V = \sqrt{\frac{2g(h+\delta)}{1-k^2}};$$

si k est très-petit, k^2 pourra être négligé, et l'on aura simplement

$$V = \sqrt{2g(h+\delta)},$$

et si la pression est sensiblement la même à la partie supérieure du liquide et à l'orifice, on pourra négliger δ, et l'on aura

$$V = \sqrt{2gh}.$$

On retombe ainsi sur les résultats obtenus précédemment.

Écoulement d'un fluide élastique.

192. Nous admettrons encore l'hypothèse du parallélisme des tranches, et la question sera à peu près semblable à la précédente; seulement il sera permis de faire abstraction de la pesanteur, qui n'influe pas sensiblement sur les pressions.

L'équation (a) se trouvera par là réduite à

$$\frac{dp}{dx} + \rho\frac{du}{dt} + \rho u\frac{du}{dx} = 0.$$

Pour obtenir l'équation de continuité, on considérera deux sections horizontales correspondantes à x et $x + dx$, et l'on cherchera la masse de fluide qui s'y introduit pendant le temps dt par la face supérieure, et celle qui en sort dans

le même temps par la face inférieure; l'excès de la première quantité sur la seconde, divisé par le volume ωdz, donnera l'accroissement partiel de la densité par rapport au temps On trouvera ainsi

$$\omega \frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho\omega u}{dx} = 0.$$

Enfin, en supposant la température constante, on aura

$$p = k\rho,$$

k étant une constante donnée.

Ces trois équations déterminent p, ρ et u en fonction de t et x.

Si l'on élimine ρ, on aura

$$\frac{k}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} = 0, \quad \omega\frac{dp}{dt} + \frac{d.p\omega u}{dx} = 0.$$

Ces équations aux différentielles partielles ne sont pas intégrables sous forme finie. Mais ce qu'il est surtout important de connaître, c'est la vitesse de l'écoulement, lorsque la pression et la vitesse sont devenues constantes en chaque point; ce qui arrive assez promptement, en supposant que le vase communique avec un réservoir qui renouvelle le gaz et détermine à la partie supérieure une pression constante.

On a alors $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$, et les équations précédentes deviennent

$$\frac{kdp}{pdx} + u\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d.p\omega u}{dx} = 0.$$

Les intégrales de ces deux équations sont

$$p\omega u = c, \quad k\log p + \frac{u^2}{2} = c',$$

c et c' désignant des constantes arbitraires.

Soient P, U, O la pression, la vitesse et l'aire de la section, relatives à la partie supérieure du vase; P′, U′, O′ leurs valeurs à l'orifice, on aura

$$\text{PUO} = c, \quad 2k \log \text{P} + \text{U}^2 = 2c',$$
$$\text{P}'\text{U}'\text{O}' = c, \quad 2k \log \text{P}' + \text{U}'^2 = 2c'.$$

Ces quatre équations détermineront les constantes c, c', ainsi que les vitesses du fluide à l'orifice et au sommet.

En éliminant c et c', on obtient

$$\text{U}' = \frac{\text{PO}}{\text{P}'\text{O}'}.\text{U}, \quad \text{U}'^2 = \text{U}^2 + 2k \log \frac{\text{P}}{\text{P}'};$$

et éliminant U′, on trouve

$$\text{U} = \sqrt{\frac{2k \log \frac{\text{P}}{\text{P}'}}{\frac{\text{P}^2\text{O}^2}{\text{P}'^2\text{O}'^2} - 1}}.$$

L'orifice O′ étant plus petit que O, et la pression P′ étant aussi moindre que P, sans quoi l'écoulement n'aurait pas lieu, les deux termes de la fraction sous le radical sont positifs, et U est nécessairement réel. La valeur de U′ se déduit de celle de U, et l'on trouve

$$\text{U}' = \sqrt{\frac{2k \log \frac{\text{P}}{\text{P}'}}{1 - \frac{\text{P}'^2\text{O}'^2}{\text{P}^2\text{O}^2}}}.$$

Les valeurs de c, c' s'en déduisent facilement, et par conséquent les valeurs de p et u seront déterminées en fonction de ω et, par suite, de x.

Si l'on suppose $\frac{\text{O}'}{\text{O}}$ très-petit, on aura U très-petit, et $\text{U}' = \sqrt{2k \log \frac{\text{P}}{\text{P}'}}$. Telle est la vitesse d'écoulement d'un

gaz par un petit orifice, lorsque les pressions P, P′, à la partie supérieure et à l'orifice, sont constantes.

Notions sur la résistance des fluides.

193. Lorsqu'un corps solide se meut dans un fluide, il éprouve une résistance qui dépend de sa forme, de sa vitesse et de la nature du fluide. Les pressions exercées sur les différents points de la surface sont très-différentes de ce qu'elles seraient dans l'état d'équilibre, et le calcul n'a pu encore y être appliqué avec succès. Les expériences n'ont même pas donné de lois empiriques assez générales pour être susceptibles d'applications utiles dans le cas de corps de forme quelconque. On a cependant quelques résultats assez généraux relativement à la résistance des liquides en mouvement contre des plans qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes. Ces résultats et les expériences d'où on les a déduits se rapportant au Cours de machines, nous ne nous en occuperons pas ici, et nous nous bornerons à un cas qui peut être traité par le calcul, et qui a pour objet la pression exercée par une veine liquide contre un plan.

194. *Pression d'une veine liquide sur un plan.* — Supposons un liquide dont la densité soit ρ, qui s'écoule par un orifice dont l'aire soit ω, de telle sorte que les vitesses de toutes les molécules qui passent par l'orifice soient égales, parallèles et indépendantes du temps, et faisons abstraction de la pesanteur, pour ne considérer que l'effet dû à la vitesse du liquide. Le mouvement de cette veine est modifié par un plan fixe, ou mobile en restant parallèle à lui-même; et l'on suppose que le liquide s'écoule le long du plan, et que celui-ci soit assez prolongé pour que toutes les molécules aient acquis, avant de le quitter, des vitesses parallèles à ce plan. On demande quel effort sera nécessaire pour

maintenir le plan en repos, ou dans un état donné de mouvement uniforme.

Considérons d'abord le cas où le plan serait en repos et perpendiculaire à la direction de la veine fluide, et, pour nous représenter plus commodément le système des points en mouvement, supposons que la veine fluide ait une longueur indéfinie et une vitesse constante v. Les choses se passent comme s'il en était ainsi, et nous pourrons plus facilement appliquer les principes généraux du mouvement. Les molécules du liquide, tant avant qu'après la rencontre du plan, forment un système de points libres, soumis à leurs actions mutuelles et aux forces normales exercées sur une partie d'entre elles par le plan.

On aura donc, en supposant l'axe des x positifs dans le sens du mouvement du liquide,

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

en désignant par X la force produite par l'élément $d\lambda$ de la surface du plan, et qui est égale et contraire à la pression que le fluide exerce sur lui. Désignant par R la somme de toutes ces pressions élémentaires, ou la résistance totale du plan, on aura

$$R = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

L'état du système étant devenu invariable, intégrons les deux membres de cette équation par rapport au temps, entre deux époques éloignées l'une de l'autre d'une unité de temps, nous obtiendrons

$$R = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0,$$

le second membre étant la différence entre les composantes, perpendiculaires au plan, des quantités de mouvement de

tous les points du liquide à ces deux époques. Or, tous les points où les vitesses perpendiculaires au plan sont variables, formant à chaque instant un système identique, il s'ensuit que la valeur de ce second membre n'est autre chose que la différence entre les composantes des quantités de mouvement de la partie du liquide qui a quitté le plan et de celle dont la veine indéfinie a été diminuée. Or la première quantité est nulle, puisque le liquide quitte le plan avec une vitesse dont la composante normale au plan est nulle; il ne reste donc que la seconde quantité, dont la valeur est le produit de la quantité de liquide écoulée dans l'unité de temps, ou $\rho\omega v$ par la vitesse v qu'elle avait, ce qui donne $\rho\omega v^2$.

L'équation précédente devient ainsi

$$R = -\rho\omega v^2;$$

La pression égale et contraire qu'éprouve le plan est donc

$$\rho\omega v^2.$$

195. Supposons maintenant que le plan se transporte parallèlement à lui-même, et qu'il ne produise en chaque point que des forces normales, il sera inutile d'avoir égard à la composante de sa vitesse dans le sens du plan même, et l'on se bornera à considérer la vitesse normale u, que l'on regardera comme positive quand elle sera dans le même sens que v, et comme négative dans le cas contraire. Or, on ne changera rien aux pressions en donnant un mouvement commun à tous les points du système, et, par conséquent, on pourra réduire la plan au repos, ce qui ramènera au cas précédent. Il suffira pour cela d'ajouter $-u$ à la vitesse de chaque point, et l'on se trouve dans le même cas que si, le plan étant en repos, la vitesse du liquide à l'orifice était $(v-u)$; on aura donc, pour l'expression de la résistance opposée au plan, $\rho\omega(v-u)^2$.

196. Supposons enfin que le plan fasse avec la direction de la veine un angle quelconque θ, et se meuve parallèlement à lui-même. Décomposons sa vitesse en deux autres : l'une dans le sens même de ce plan, et que l'on peut négliger ; l'autre parallèle à la direction de la veine. Désignons cette dernière par u et donnons au système entier une vitesse égale et contraire. Le plan deviendra immobile, et la vitesse du liquide sera réduite à $(v - u)$.

Cela posé, si nous prenons l'axe des x perpendiculaire au plan fixe, nous aurons toujours l'équation

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0,$$

et l'état du liquide étant devenu invariable, le second membre se réduira encore à la masse écoulée pendant l'unité de temps, ou $\rho\omega(v - u)$, multipliée par la composante de la vitesse $(v - u)$ perpendiculairement au plan, ou $(v - u)\sin\theta$. La pression exercée sur le plan mobile est donc $\rho\omega(v - u)^2\sin\theta$. On peut donner une autre forme à cette expression en désignant par a la vitesse du plan estimée suivant la normale. On a alors $u = \frac{a}{\sin\theta}$, et la pression devient alors $\rho\omega\frac{(v\sin\theta - a)^2}{\sin\theta}$; si le plan est en repos, on a $a = 0$, et la pression se réduit à $\rho\omega v^2\sin\theta$.

Ces formules sont démontrées, par d'autres considérations, dans le Mémoire de M. Coriolis (*) *sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIe cahier.

CALCUL DES PETITS MOUVEMENTS DES FLUIDES ÉLASTIQUES.

197. Lorsque tous les points d'un fluide n'ont que des mouvements extrêmement petits, les équations générales se simplifient beaucoup, et conduisent à quelques lois simples que nous allons exposer.

Nous supposerons que l'expression $udx + vdy + wdz$ soit à chaque instant la différentielle d'une fonction φ de x, y, z, t, prise seulement par rapport aux variables x, y, z. Nous savons qu'il suffit pour cela que, dans l'état initial, les composantes connues u, v, w de la vitesse d'un point quelconque soient les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une même fonction de ces trois variables considérées comme indépendantes; ce qui aura lieu en particulier si les vitesses initiales sont nulles. Nous devrons donc, dans les questions que nous allons étudier, faire usage de l'équation (6) du n° 182; et nous allons d'abord y opérer les simplifications qui résultent de l'hypothèse que les mouvements restent très-petits.

Soient D la densité du gaz dans son état naturel d'équilibre, Δ celle du mercure, p_0 la force élastique de ce gaz, h la hauteur de mercure qui la mesure, et g la gravité; on aura

$$p_0 = gh\Delta.$$

Désignons par ρ la densité variable du gaz, par γ sa condensation positive ou négative, et par p sa force élastique, on aura

$$\rho = D(1 + \gamma),$$

et, en supposant la température égale à celle de l'état initial,

$$p = gh(1 + \gamma)\Delta:$$

Mais la condensation développe une certaine quantité de

chaleur qui lui est proportionnelle, si elle est très-petite, comme nous le supposons. Cette chaleur n'a pas le temps de se répandre si les alternatives de dilatation et de condensation se succèdent rapidement, comme cela aura lieu dans les questions que nous examinerons ; on doit donc la considérer comme ayant pour effet d'élever la température des points où elle est dégagée d'une quantité de même signe que la condensation, et proportionnelle à sa grandeur. Dans le cas où la chaleur aurait le temps de se dissiper dans le milieu, on n'en tiendrait pas compte dans le calcul. Si l'on représente par θ le nombre positif ou négatif de degrés centésimaux dont s'élève la température primitive v du gaz, pour une condensation γ ; par c et c' les chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant, et par α le coefficient de dilatation de ce gaz, on démontre en physique que ces quantités ont entre elles la relation suivante :

$$\alpha\theta = \gamma\left(\frac{c}{c'} - 1\right);$$

on aura, de plus, la proportion

$$p : p_0 :: D(1+\gamma)[1+\alpha(v+\theta)] : D(1+\alpha v),$$

d'où l'on tire, en remplaçant p_0 par gh et négligeant les puissances de α supérieures à la première, et le produit des quantités très-petites γ, θ,

$$p = gh(1+\gamma+\alpha\theta)\Delta,$$

ou, en remplaçant $\alpha\theta$ par sa valeur en fonction de γ,

$$p = gh\left(1+\gamma\frac{c}{c'}\right)\Delta,$$

d'où

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{ghc\Delta}{Dc'}\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

L'équation (6) donne ainsi

$$\frac{ghc\Delta}{Dc'}\,\mathrm{l}.(1+\gamma) = -\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Or, en supposant que les condensations et vitesses initiales soient des quantités extrêmement petites du même ordre, et qu'il en soit de même à une époque quelconque, on pourra négliger les carrés des composantes $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ par rapport à $l(1+\gamma)$, qui peut être remplacé par γ, et la dernière équation se réduit à

$$\frac{ghc\Delta}{Dc'}\gamma = -\frac{d\varphi}{dt},$$

ou, en posant $\frac{ghc\Delta}{Dc'} = a^2$,

(1) $$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}.$$

L'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0$$

devient d'abord

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0,$$

ou, en négligeant les termes très-petits par rapport à ceux qui subsistent dans l'équation,

(2) $$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Les équations (1) et (2) déterminent γ et φ.

Si l'on élimine entre elles γ, on obtient

(3) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

On est donc ramené à l'intégration d'une équation différentielle partielle du second ordre, linéaire et à coefficients constants. Les fonctions arbitraires se détermineront par les valeurs initiales de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$, et il n'y aura pas d'autres conditions si le fluide est indéfini dans tous les sens. Dans le cas contraire, il y a, comme nous le savons, des équations particulières aux limites, qui augmentent beaucoup les difficultés du calcul.

La valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$ est connue par celle de γ qui est une donnée nécessaire. Quant à celle de φ, elle résulte des valeurs initiales des composantes de la vitesse, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, qui sont nécessairement données. Ces trois fonctions de x, y, z déterminent, à une constante près, la fonction φ; et comme cette constante ne peut avoir aucune influence sur les quantités cherchées, qui s'obtiennent toutes par la différentiation de la fonction φ, on n'en doit tenir aucun compte, et l'on peut considérer la fonction générale φ comme connue lorsqu'on y fait $t = 0$.

Le problème de mécanique est donc ramené à une question de calcul intégral dont les données sont complètes. Nous nous bornerons à la traiter dans quelques cas particuliers.

198. *Superposition des effets.* — Si dans ce fluide, supposé indéfini dans tous les sens, on conçoit divers états initiaux et les mouvements partiels qui leur correspondraient, et satisferaient à l'équation (3), il est facile de reconnaître que, si l'on considère un nouvel état initial résultant de la composition des premiers, le mouvement correspondant pourra être obtenu à une époque quelconque par la composition des mouvements partiels relatifs à la même époque; cette composition étant entendue dans

le sens ordinaire pour les vitesses, et consistant dans une addition algébrique pour les condensations. En effet, soient φ_1, φ_2, φ_3, etc., les valeurs de φ correspondantes aux mouvements partiels, et qui satisfont séparément à l'équation (3); posons

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots .$$

La fonction φ satisfera elle-même à l'équation (3), et représentera, par conséquent, un mouvement particulier du fluide. Sa dérivée par rapport à t sera la somme de celles des fonctions φ_1, φ_1, etc. En les considérant toutes pour la valeur $t = 0$, on en conclura d'abord que la condensation initiale du fluide dans le mouvement représenté par φ est la somme des condensations initiales relatives aux divers mouvements partiels; et, de plus, les dérivées de φ par rapport à x, y, z seront les sommes de celles des fonctions φ_1, φ_2, φ_3, etc.; et si l'on y fait $t = 0$, on en conclut que dans le mouvement représenté par φ, les vitesses initiales de chaque molécule s'obtiennent en composant celles qui se rapportent à la même molécule dans les états initiaux partiels. Donc l'état initial du fluide dans le mouvement représenté par φ est identique pour les condensations et pour les vitesses à celui que nous nous proposions de déterminer; ces deux mouvements sont donc identiques à une époque quelconque. Si maintenant, au lieu de faire $t = 0$ dans les fonctions $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, on attribue à cette variable une valeur quelconque, ces fonctions seront toujours les sommes de celles qui correspondent à φ_1, φ_2, φ_3, etc. Donc enfin les condensations et les composantes de la vitesse dans le mouvement cherché seront à chaque instant les sommes algébriques de celles que l'on observerait à la même époque, et respectivement aux mêmes points, dans les mouvements déterminés par les états initiaux partiels.

Mouvement d'un gaz dans un tuyau cylindrique indéfini.

199. Supposons un cylindre creux indéfini, dont la section orthogonale soit une courbe quelconque, et qui soit rempli d'un gaz homogène, par exemple d'air atmosphérique. Dans une étendue quelconque de ce tuyau, on a déplacé les molécules de telle sorte que celles qui étaient dans une même section orthogonale y soient restées, et se soient mues parallèlement aux arêtes du cylindre; puis on a imprimé à toutes ces molécules des vitesses parallèles à ces arêtes et égales pour celles qui sont dans une même section : et ensuite on a abandonné le fluide à lui-même, sans introduire aucune force extérieure. Il s'agit de déterminer toutes les circonstances du mouvement qui en résultera.

Nous remarquerons d'abord que le mouvement de toutes les molécules situées dans une même section sera le même, et, de plus, parallèle aux arêtes du cylindre. Si donc on prend cette direction pour celle de l'axe des x, la condensation γ et la vitesse u ou $\frac{d\varphi}{dx}$ ne dépendront que de x et t.

Les équations du problème seront donc

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad (1)$$

et si l'on suppose que les vitesses initiales soient exprimées par la fonction $\psi(x)$, et les condensations initiales par $\chi(x)$, on devra avoir

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x), \quad \text{pour} \quad t = 0. \qquad (2)$$

L'intégrale de l'équation (1) est

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at), \qquad (3)$$

F_1 et f_1 désignant des fonctions arbitraires, dont nous représenterons les fonctions dérivées par F et f. Les équations (2) donneront, pour déterminer ces fonctions, les deux conditions suivantes :

$$f(x) + F(x) = \psi(x),$$
$$f(x) - F(x) = a\chi(x),$$

d'où l'on tire

$$f(x) = \frac{\psi(x) + a\chi(x)}{2}, \quad F(x) = \frac{\psi(x) - a\chi(x)}{2}.$$

Si maintenant on différentie l'équation (3) par rapport à x et à t, on trouvera, d'après les valeurs qui viennent d'être déterminées pour les fonctions f et F,

$$u = \frac{\psi(x+at) - a\chi(x+at)}{2} + \frac{\psi(x-at) + a\chi(x-at)}{2},$$

$$a\gamma = \frac{\psi(x-at) + a\chi(x-at)}{2} - \frac{\psi(x+at) - a\chi(x+at)}{2}.$$

Mais, pour plus de simplicité, nous conserverons les fonctions F et f, et nous aurons les formules suivantes :

$$(4) \qquad u = F(x+at) + f(x-at),$$

$$(5) \qquad a\gamma = -F(x+at) + f(x-at).$$

Les fonctions ψ et χ étant données pour toutes les valeurs de la variable entre $-\infty$ et $+\infty$, on connaîtra u et γ pour des valeurs quelconques de x et t.

Si l'on veut connaître le mouvement des molécules comprises dans une section particulière, qui dans l'état initial correspondait à l'abscisse α, il faudra, dans l'équation (4), remplacer u par $\frac{dx}{dt}$, et intégrer celle que l'on obtient par là entre x et t. On connaîtra ainsi, en fonction du temps, l'abscisse des molécules en question. La constante que cette

intégration introduira sera déterminée par la condition que pour $t = 0$ on ait $x = \alpha$. Il sera inutile de s'occuper de la vitesse initiale, puisque la valeur générale de u satisfait à la condition des vitesses initiales pour tous les points du fluide.

200. Examinons le cas particulier où l'ébranlement initial est limité, et s'étend par exemple depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, ou depuis l'origine A jusqu'en B (*fig.* 13).

Alors les fonctions données par ψ et χ sont nulles pour toute valeur de la variable, plus petite que 0 ou plus grande que l; et il en est de même, par conséquent, des fonctions F, f. Nous partagerons cette discussion en trois parties, correspondantes aux trois régions dans lesquelles l'ébranlement initial divise l'axe des x.

1°. Considérons d'abord un point quelconque M en dehors de AB et du côté des x positifs, c'est-à-dire pour lequel on a $x > l$; et supposons $t > 0$, ce qui veut dire que nous considérons les époques postérieures à celle qui est prise pour origine des temps.

Dans ce cas, on a

$$x + at > l,$$

et, par conséquent,

$$F(x + at) = 0, \quad f(x + at) = 0.$$

Les formules (4) et (5) se réduisent donc aux termes où entre $x - at$, et l'on a

$$(6) \qquad \begin{cases} u = f(x - at), \\ a\gamma = f(x - at), \end{cases}$$

d'où résulte, entre la vitesse et la condensation, la relation remarquable

$$u = a\gamma.$$

Mais, pour que ces valeurs de u et y ne soient pas nulles, il faut que l'on ait

$$x - at < l \quad \text{et} \quad x - at > 0,$$

ou

$$t > \frac{x - l}{a}, \quad t < \frac{x}{a}.$$

Ainsi, le point M reste en repos jusqu'à l'époque pour laquelle on a

$$t = \frac{x - l}{a} = \frac{\text{BM}}{a};$$

il est en mouvement jusqu'à celle où l'on a

$$t = \frac{x}{a} = \frac{\text{AM}}{a},$$

puis il retombe au repos et y reste indéfiniment. Le mouvement se propage donc dans le sens BX avec une vitesse égale à a, et subsiste en chaque point pendant un temps égal à $\frac{l}{a}$; de sorte que la partie ébranlée a une longueur l et semble se mouvoir avec la vitesse a en présentant constamment le même aspect, puisque la variable $x - at$ y a toutes les valeurs comprises entre 0 et l. Mais ce mouvement n'est qu'une simple apparence; cette onde est composée de molécules qui se remplacent à chaque instant, et l'on peut dire que c'est la figure géométrique qui se meut avec la vitesse a, et non les molécules de fluides qui y sont comprises.

2°. Considérons maintenant un point M' pour lequel on ait $x < 0$, et à plus forte raison $x - at < 0$. On aura alors

$$\text{F}(x - at) = 0, \quad f(x - at) = 0,$$

et les formules (4) et (5) se réduisent aux termes où entre

$x + at$; on a ainsi

$$(7) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{F}(x + at), \\ a\gamma = -\mathrm{F}(x + at). \end{cases}$$

On a encore, au signe près, le même rapport constant entre la vitesse et la condensation; il est exprimé par l'équation

$$u = -a\gamma.$$

On reconnaît facilement que les valeurs de u et γ ne seront différentes de zéro que si l'on a

$$x + at > 0, \quad x + at < l,$$

d'où

$$t > -\frac{x}{a}, \quad t < \frac{l - x}{a},$$

ou encore

$$t > \frac{\mathrm{AM}'}{a}, \quad t < \frac{\mathrm{BM}'}{a};$$

il résulte de là, comme on devait s'y attendre, que le mouvement se propage dans la partie AX′ comme dans la partie BX, avec une vitesse a; que tout point se meut pendant le temps $\frac{l}{a}$, et que la partie ébranlée où l'onde a une longueur l, est toujours constituée de la même manière et se déplace uniformément avec la vitesse a dans le sens des x négatifs.

3°. Considérons, en dernier lieu, un point M″ entre A et B, on aura

$$x > 0, \quad x < l,$$

de sorte que $x - at$ et $x + at$ resteront pendant un certain temps compris l'un et l'autre entre 0 et l, et tous les termes des formules (4) et (5) subsisteront. Mais $x + at$ deviendra $> l$ après l'instant pour lequel on aura

$$at = \mathrm{BM}'',$$

et, depuis ce moment, les fonctions de $x + at$ seront nulles. De même, $x - at$ deviendra négatif après l'époque pour laquelle on aura

$$at = AM''.$$

Ainsi, on considérera les termes en $x + at$ qui se rapportent à l'onde qui marche vers les x négatifs, jusqu'à ce que le point B soit arrivé en M″ en se mouvant avec la vitesse a; on considérera les termes en $x - at$ qui se rapportent à l'onde qui marche vers les x positifs, jusqu'à ce que le point A, se mouvant avec la vitesse a, soit arrivé en M″. Et par conséquent, si l'on considère les deux parties qui composent les formules (4) et (5) comme exprimant respectivement les vitesses et les condensations dans deux ondes distinctes, et que l'on suppose que chacune de ces ondes se déplace avec une vitesse a, l'une dans un sens, et l'autre dans l'autre, en conservant toujours la même constitution, on aura, à un instant quelconque, l'état du fluide, en plaçant ces deux ondes dans la position où leur mouvement les aura amenées à cette époque, et superposant les condensations et les vitesses dans les parties où elles se pénétreront si elles ne sont pas encore entièrement séparées.

On aurait les états antérieurs à l'époque prise pour origine des temps, en faisant marcher respectivement en sens contraire ces mêmes ondes, avec la vitesse a, pendant un temps égal à l'intervalle qui sépare l'époque en question de l'origine des temps.

201. Nous venons de voir qu'un ébranlement initial d'une longueur finie donnait naissance à deux ondes de même longueur, animées de vitesses égales et de sens contraire. Mais il est possible que l'une de ces ondes n'existe pas. La première par exemple, qui correspond aux formules (6), disparaîtrait si l'on avait pour toutes les valeurs

de z comprises entre o et l,

$$\psi(z) + a\chi(z) = 0.$$

Il n'existerait alors que l'onde qui correspond aux formules (7). Et de même celle-ci n'existerait pas, et la première subsisterait seule, si l'on avait

$$\psi(z) - a\chi(z) = 0.$$

Ainsi, pour qu'il n'y ait qu'une seule onde, il est nécessaire et suffisant que le rapport de $\psi(z)$ à $\chi(z)$ soit $+a$ ou $-a$; ou, en d'autres termes, que dans l'état initial le rapport de la vitesse à la condensation en un point quelconque de la partie ébranlée soit $+a$ ou $-a$.

Mouvement d'un gaz dans un tuyau limité dans un sens.

202. Nous venons de voir quelle est la loi du mouvement dans un tuyau indéfini dans les deux sens. Examinons maintenant la modification qu'elle subit lorsque le tuyau est limité dans un sens et terminé par un plan fixe, ou en communication avec un immense réservoir de gaz soumis à une pression constante, par exemple avec l'amosphère. Nous discuterons séparément ces deux cas.

1°. *Cas d'un tuyau fermé.* — Supposons d'abord le tuyau terminé par un plan fixe, et comptons les x positifs à partir de ce plan, et dans le sens du tuyau.

Nous avons admis généralement que les molécules primitivement en contact avec une paroi y restent constamment appliquées. Ainsi, dans le cas actuel, la section correspondante à $x = 0$ aura une vitesse nulle à chaque instant; c'est-à-dire que l'on aura

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

quel que soit t. Cette nouvelle condition devra être jointe

à celles qui résultent de l'état initial du gaz qui est donné dans toute l'étendue du tuyau, c'est-à-dire pour toutes les valeurs positives de x. Nous représenterons toujours par $\psi(x)$ et $\chi(x)$ la vitesse et la condensation initiales; ces fonctions ne seront données que pour les valeurs positives de la variable, et sont entièrement arbitraires pour ses valeurs négatives. C'est cette indétermination qui permettra de satisfaire à la condition relative à l'extrémité; car nous avons vu que, lorsque ces fonctions sont données pour toutes les valeurs de la variable, la valeur de φ est complétement déterminée, et on ne peut plus l'assujettir à aucune condition particulière.

La valeur générale de φ qui satisfait à l'équation différentielle sera toujours

$$(2) \qquad \varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

La condition (1) conduit à l'équation suivante :

$$F(at) + f(-at) = 0;$$

et comme elle doit avoir lieu quel que soit t, en grandeur et en signe, si l'on remplace at par z, on devra avoir, quel que soit z,

$$(3) \qquad F(z) + f(-z) = 0.$$

Au moyen de cette équation, les fonctions F et f, qui sont données pour les valeurs positives de la variable, seront connues pour ses valeurs négatives. En effet, en supposant z positif, on en tirera

$$f(-z) = -F(z),$$

ce qui fait connaître f pour toutes les valeurs négatives de la variable.

Et si l'on change z en $-z$ dans l'équation (3) et que l'on suppose encore z positif, on trouvera

$$F(-z) = -f(z),$$

équation qui fera connaître F pour toutes les valeurs négatives de la variable.

Ces conditions peuvent se représenter géométriquement d'une manière très-simple. Si l'on conçoit, dans toute l'étendue de l'axe des x, les courbes ayant pour équations

$$y = \mathrm{F}(x), \quad y = f(x),$$

le lieu géométrique composé de la partie de l'une quelconque des deux qui est située du côté des x positifs, et de la partie de l'autre qui est située du côté des x négatifs, a pour centre l'origine. Et, du reste, les branches de l'une et de l'autre, situées du côté des x positifs, sont déterminées, comme nous l'avons déjà vu, par les fonctions ψ et χ qui sont données dans chaque cas particulier.

Cette construction, qui n'est que la représentation des conditions analytiques, pourra toujours les remplacer, et facilitera quelquefois les discussions.

On voit ainsi comment la condition (1), qui exprime l'immobilité d'une tranche du gaz, conduit à la connaissance complète des fonctions F et f, et par conséquent à la solution de la question proposée.

La valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$ ou de la vitesse u, et la condensation γ, ou $-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$, seront exprimées de la manière suivante, d'après l'équation (2) :

$$(4) \qquad u = \mathrm{F}(x + at) + f(x - at),$$

$$(5) \qquad a\gamma = -\mathrm{F}(x + at) + f(x - at).$$

Ces formules conduisent d'abord à cette conséquence remarquable, qu'à une époque quelconque, en deux points situés de part et d'autre du plan fixe et à égale distance, la vitesse est la même au signe près, et la condensation est la

même. En effet, si dans u on change x en $-x$ et qu'on désigne par u_1 sa nouvelle valeur, on a

$$u_1 = \mathrm{F}(-x+at)+f(-x-at) = -f(x-at) - \mathrm{F}(x+at) = -u,$$

et de même, en changeant x en $-x$ dans $a\gamma$, on trouve

$$a\gamma_1 = \mathrm{F}(-x+at)+f(-x-at) = f(x-at) - \mathrm{F}(x+at) = a\gamma.$$

Cette propriété, qui subsiste quel que soit t, existe pour $t=0$, c'est-à-dire dans l'état initial, et nous insisterons particulièrement ici sur la manière dont on exprime dans le calcul les conditions relatives aux limites des systèmes. L'équation différentielle partielle serait satisfaite dans le mouvement du gaz homogène qui serait renfermé dans le tuyau prolongé indéfiniment. Or, on peut disposer arbitrairement de l'état initial de tout l'espace dans lequel on a prolongé le système; et toute la difficulté est de trouver comment il faut le choisir pour qu'en abandonnant ensuite le sytème total à lui-même, sans tenir compte des conditions physiques qui existaient aux limites, ces conditions se trouvent remplies d'elles-mêmes à chaque instant. Si l'on peut y parvenir, la question du système limité rentre dans la question, toujours plus facile, du système indéfini dans lequel l'état initial est connu.

Dans le cas actuel, il est facile de prévoir ce que le calcul nous a annoncé relativement à l'état initial qu'il fallait donner au fluide dans le prolongement du tube du côté des x négatifs. En effet, en donnant aux molécules situées dans des sections équidistantes de l'origine, des vitesses égales et de signes contraires, et y supposant des condensations identiques, tout est symétrique par rapport à l'origine, et, en supprimant le plan fixe, les molécules qui le remplaceront, étant à chaque instant sollicitées par des forces égales et contraires, resteront perpétuellement en repos.

203. Examinons en particulier le cas où l'ébranlement initial ne s'étend qu'entre les abscisses d et $d+l$. Alors les fonctions F et f sont nulles pour toutes les valeurs positives de la variable, qui ne sont pas comprises entre d et $d+l$, et, d'après l'équation (3), pour toutes les valeurs négatives non comprises entre $-d$ et $-d-l$. C'est ce que représente la *fig.* 14, dans laquelle

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AB}' = d, \quad \text{et} \quad \mathrm{BC} = \mathrm{B}'\mathrm{C}' = l.$$

La partie BC de l'ébranlement va donner naissance à deux ondes animées, l'une, de la vitesse $+a$, l'autre, de la vitesse $-a$. La partie B′C′ donnera naissance à deux ondes qui seront constamment symétriques des deux autres par rapport au point A. Lorsqu'elles seront arrivées l'une et l'autre en A, elles continueront leur marche et se pénétreront en se superposant, d'après le principe démontré généralement.

D'où l'on voit que l'effet dans le tuyau fermé AX est le même que si l'onde qui marche de BC vers le plan fixe A, en arrivant à ce plan, se repliait sur elle-même, de telle sorte que ses diverses parties, conservant la même condensation et la même vitesse en sens contraire, se superposassent toujours avec les parties correspondantes à la même abscisse et qui marchent encore vers le plan fixe. Et lorsque la seconde extrémité de l'onde partie de BC est arrivée en A, l'onde entière se trouve tournée en sens inverse, et marche indéfiniment du côté des x positifs. C'est en cela que consiste la réflexion d'une onde plane contre un plan qui lui est parallèle. Cet effet se produit, quelle que soit la longueur de la partie ébranlée BC; elle peut s'étendre indéfiniment depuis le plan A jusqu'à $x = \infty$; elle peut avoir une longueur infiniment petite. Et si l'on trouve avantageux, dans certains cas, de partager l'ébranlement en portions infiniment petites, il suffira toujours de super-

poser les effets correspondants à chacun de ces éléments, après un temps quelconque, pour avoir l'effet qui correspondrait à l'ébranlement proposé, après ce même temps.

2°. *Cas du tuyau ouvert.* — Supposons maintenant que le tuyau soit ouvert en A et en communication avec un réservoir de gaz, indéfini en tous sens, comme par exemple l'atmosphère; nous avons admis généralement que la pression qui a lieu à la surface de communication est toujours la même que celle qui a lieu dans le réservoir, et que nous supposerons constante. C'est cette pression qu'on observerait dans le gaz du tuyau en équilibre; et γ exprime l'augmentation de la densité, à partir de celle qui correspond à cet état d'équilibre.

Cela posé, on aura, pour tous les points du tuyau,

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

et

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad \text{quel que soit } t.$$

Nous représenterons encore par $\psi(x)$, $\chi(x)$ la vitesse et la condensation initiales. Ce sont des fonctions données entre $x = 0$, $x = \infty$, et complétement arbitraires entre $x = 0$, $x = -\infty$. C'est encore cette indétermination qui permettra de satisfaire à la condition relative à l'extrémité.

L'intégrale générale de l'équation (1) est encore

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at),$$

et la condition (2) conduit à l'équation suivante, dans laquelle z est tout à fait indéterminé en grandeur et en signe, et F, f sont encore les dérivées des fonctions F_1, f_1,

$$(3) \qquad F(z) = f(-z).$$

De sorte que si l'on considère les courbes ayant pour équations

$$y = F(x), \qquad y = f(x),$$

le lieu géométrique composé de la partie de l'une quelconque des deux qui est située du côté des x positifs, et de la partie de l'autre située du côté des x négatifs, sera symétrique par rapport à l'axe des y. Ainsi, au moyen de l'équation (3), les fonctions F, f, qui n'étaient données, d'après ψ et χ, que pour les valeurs positives de la variable, sont déterminées pour ses valeurs négatives. Et l'on peut encore remarquer, dans ce cas comme dans le précédent, que la question est la même que si l'on supposait le tuyau indéfiniment prolongé vers les x négatifs, pourvu qu'on donnât au gaz, dans ce prolongement, un état initial représenté par les valeurs de F et f que nous venons de déterminer pour les valeurs négatives de la variable.

Les valeurs de u et γ seront représentées par les formules suivantes :

$$(4)\qquad u = F(x + at) + f(x - at),$$

$$(5)\qquad a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Si l'on change x en $-x$ dans les équations (4) et (5), on trouve, en ayant égard à l'équation (3) et représentant par u_1, γ_1 les nouvelles valeurs de u et γ,

$$u_1 = F(-x + at) + f(-x - at) = f(x - at) + F(x + at) = u,$$

$$a\gamma_1 = -F(-x + at) + f(-x - at) = -f(x - at) + F(x + at) = -a\gamma.$$

Ainsi, en deux points quelconques situés de part et d'autre et à égale distance de l'origine, les vitesses sont égales et de même sens, et les condensations égales et de signes contraires.

Cette disposition, qui a lieu à chaque instant, a lieu aussi dans l'état initial. Ainsi, dans le cas d'un tuyau ouvert, le moyen de ramener la question à celui d'un tuyau indéfini consiste à supposer le tuyau prolongé et rempli

d'un gaz identique au premier, et disposé au commencement du mouvement, de manière que deux points également distants de l'origine et de côtés différents aient des vitesses égales et de même sens, et des condensations égales et de signes contraires.

204. Examinons le cas particulier où l'ébranlement initial donné a une étendue finie BC (*fig.* 15) comprise entre les abscisses d et $d+l$. Alors les fonctions F, f sont nulles pour toutes les valeurs de la variable qui ne sont pas comprises entre d et $d+l$; et, d'après l'équation (3), pour toutes les valeurs négatives non comprises entre $-d$ et $-d-l$. Elles sont représentées par les courbes tracées sur la figure. Or, d'après le principe de superposition, les ondes correspondantes à chacun des ébranlements BC, C′B′ se propageront avec une vitesse constante a. Les deux qui vont en s'éloignant de A ne donnent lieu à aucune remarque particulière. Quant aux deux autres, elles arriveront ensemble au point A et continueront leur marche en se superposant dans les points communs. Lorsque la seconde extrémité de chacune sera arrivée en A, ces deux ondes seront entièrement séparées, et celle qui est venue de C′B′ vers A continuera son mouvement vers les x positifs jusqu'à l'infini. De sorte que dans le tuyau réel, ouvert en A, la réflexion qui se fait en ce point a précisément pour effet de produire cette dernière onde.

Le rapport entre l'onde réfléchie et l'onde incidente résulte de la remarque faite précédemment, relativement aux points qui ont des abscisses égales et de signes contraires. En effet, l'onde incidente continuant sans altération son mouvement du côté des x négatifs, il suit de la remarque que nous rappelons, que, pour avoir l'onde réfléchie, il faut concevoir que chacun des éléments de l'onde incidente, arrivant en A, se replie sur lui-même avec la vi-

tesse a, mais de telle sorte que la vitesse absolue des molécules y reste la même en grandeur et en signe, tandis que la condensation a changé de signe sans changer de grandeur.

On peut remarquer que si cette onde réfléchie allait de nouveau rencontrer une ouverture communiquant avec un réservoir indéfini, elle subirait une nouvelle réflexion suivant les mêmes lois et redeviendrait identique avec la première onde incidente. Et cet effet se reproduirait indéfiniment.

Mouvement d'un gaz dans un tuyau limité dans les deux sens.

205. Lorsqu'un tuyau est limité dans les deux sens, il se passe à ses deux extrémités, ouvertes ou fermées, des effets semblables à ceux que nous venons de considérer. Chaque élément de l'ébranlement donne naissance à deux ondes qui marchent en sens inverse et vont successivement se réfléchir aux deux extrémités suivant les lois que nous venons d'établir. On peut reconnaître ainsi la périodicité de ce mouvement et la durée de la période.

Considérons, par exemple, un tuyau fermé à ses deux extrémités. Un élément infiniment petit de l'ébranlement initial donnera lieu à deux ondes élémentaires. Suivons la marche de l'une des deux. Parvenue à l'extrémité, elle sera réfléchie de manière que la condensation soit restée la même, et la vitesse la même au signe près; arrivée à la seconde extrémité, elle est de nouveau réfléchie, en conservant la même condensation et la même vitesse au signe près; elle est donc revenue au même état qu'au moment du départ. Or, elle reprendra sa position initiale après avoir parcouru, avec la vitesse a, un espace égal à deux fois la longueur du tuyau; et il en sera de même de tous

les éléments de l'ébranlement primitif; et, par conséquent, à ce même moment, l'état du gaz dans le tuyau entier sera identique avec l'état initial. Les états subséquents seront donc les mêmes que ceux qui ont déjà eu lieu, et ce mouvement se reproduira périodiquement. Si l'on désigne par l la longueur du tuyau, la durée de la période sera $\frac{2l}{a}$. Un raisonnement analogue montrerait que, dans le tuyau ouvert aux deux extrémités, l'état du gaz redevient encore le même lorsque l'onde élémentaire a parcouru l'espace $2l$.

Mais si le tuyau est fermé d'un côté et ouvert de l'autre, les choses ne se passent plus tout à fait de la même manière; comme il faut, pour que l'état du gaz soit redevenu le même, que l'onde élémentaire ait subi deux fois la même espèce de réflexion, et que les deux extrémités en produisent d'espèces différentes, il sera nécessaire que cette onde ait parcouru quatre fois la longueur du tuyau, et, par conséquent, la durée de la période sera $\frac{4l}{a}$.

On désigne sous le nom de *vibration* un petit mouvement qui se reproduit périodiquement; et l'on reconnaît, en physique, que le son qui en résulte est d'autant plus aigu que le nombre de vibrations faites dans un même temps est plus grand. Il suit de la discussion précédente que le son rendu par un tuyau ouvert à une extrémité, et fermé à l'autre, est à l'octave au-dessous de celui que rendrait un tuyau de même longueur, ouvert ou fermé à ses deux extrémités.

Il est bon de remarquer que la durée que nous avons reconnue pour la période est une limite supérieure. Nous avons prouvé qu'après cet intervalle on retombe identiquement sur le même état du gaz, et généralement on n'y retombera pas auparavant. Mais il est possible que l'état initial soit tel qu'il se reproduise identiquement avant que

cet intervalle ne soit achevé; cette période, plus petite, ne pourra évidemment être qu'un sous-multiple de la première. Nous ne faisons qu'indiquer ce résultat que nous retrouverons tout à l'heure dans la discussion directe et complète des trois cas que nous venons d'examiner rapidement.

1°. *Cas d'un tuyau fermé à ses deux extrémités.* — En désignant par l la longueur du tuyau AB (*fig.* 17) et conservant toujours les mêmes notations, nous aurons à satisfaire aux équations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = l,$$

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \psi(x), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

La condition (2), relative à $x = 0$, conduit à l'équation suivante, dans laquelle z désigne une quantité arbitraire :

$$(4) \qquad F(z) + f(-z) = 0.$$

La même condition (2), considérée pour $x = l$, donnera

$$(5) \qquad F(l + z) + f(l - z) = 0.$$

Les fonctions F et f, qui se déduisent, comme nous l'avons déjà fait voir, des fonctions données ψ, χ, ne sont déterminées, comme ces dernières, que pour les valeurs de la variable qui sont comprises entre 0 et l. Les équations (4) et (5) vont les déterminer complétement, et l'on saura alors quel devrait être l'état initial du gaz dans un tuyau

indéfini dans les deux sens, pour présenter entre o et l tous les mêmes effets qui vont se produire dans le tuyau en question.

L'équation (4) exprime, comme nous avons déjà eu occasion de le remarquer, que si l'on considère les courbes ayant pour équations

$$y = \mathrm{F}(x), \quad y = f(x),$$

depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, le lieu formé de la partie de l'une située d'un côté de A, et de la partie de l'autre située de l'autre côté, a le point A pour centre.

L'équation (5) exprime qu'il en est de même relativement au point B. Ce lieu ayant deux centres A, B, en a une infinité d'autres, distants les uns des autres de cette même quantité l, et situés à droite et à gauche de l'origine A, comme l'indique la figure. Il en résulte que chacune des fonctions F et f est périodique par rapport à la variable, et conserve la même valeur quand cette variable augmente ou diminue de $2l$.

Cette propriété importante peut d'ailleurs facilement être déduite des équations (4) et (5). En effet, si dans la dernière on change z en $z + l$, elle devient

$$\mathrm{F}(2l + z) + f(-z) = 0,$$

résultat qui, combiné avec l'équation (4), donne, quel que soit z,

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(2l + z);$$

d'où il résulte que la fonction F est périodique, et que la période se rapporte à l'étendue $2l$ de la variable. On prouverait semblablement la périodicité de la fonction f. On changerait z en $z - l$ dans l'équation (5), ce qui don-

nerait

$$F(z) + f(2l - z) = 0,$$

et, en vertu de l'équation (4),

$$f(2l - z) = f(-z).$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit z, en grandeur et en signe, prouve que la fonction f est périodique, et que, de même que pour la fonction F, la période se rapporte à l'étendue $2l$ de la variable.

Cela posé, on déduira, comme précédemment, de la valeur de φ,

$$u = F(x + at) + f(x - at),$$
$$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Or, il suit de la périodicité des fonctions F et f, que la vitesse et la condensation redeviennent les mêmes en un même point quelconque, à des époques distantes les unes des autres d'un intervalle T, tel que l'on ait

$$aT = 2l.$$

L'état du tuyau est donc périodique et se reproduit indéfiniment à des époques distantes les unes des autres de l'intervalle $\frac{2l}{a}$, comme nous l'avions déjà trouvé.

2°. *Cas d'un tuyau ouvert à ses deux extrémités.* — Dans ce cas, la condensation devant être nulle à chaque instant aux deux extrémités, on devra avoir, quel que soit t,

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = l,$$

ce qui exige que l'on ait, quel que soit z,

(1) $$F(z) = f(-z),$$
(2) $$F(l + z) = f(l - z);$$

changeant z en $z+l$ dans l'équation (2), on obtient

$$F(2l+z)=f(-z),$$

et, d'après l'équation (1),

$$F(2l+z)=F(z);$$

donc encore la fonction F est périodique, et sa période répond à l'étendue $2l$ de la variable.

On arrive à la même conséquence pour la fonction f, en changeant z en $z-l$ dans l'équation (2); ce qui donne

$$F(z)=f(2l-z),$$

et, d'après l'équation (1),

$$f(2l-z)=f(-z).$$

L'état du tuyau est donc encore périodique, et est le même à deux époques quelconques séparées l'une de l'autre par un intervalle égal à $\frac{2l}{a}\cdot$

3°. *Cas d'un tuyau fermé d'un côté et ouvert de l'autre.* — Supposons qu'à l'extrémité prise pour origine, le tuyau soit fermé, et qu'il soit ouvert à l'autre, on devra avoir, quel que soit t,

$$(1)\qquad \frac{d\varphi}{dx}=0 \quad \text{pour} \quad x=0,$$

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=0 \quad \text{pour} \quad x=l.$$

Ces deux conditions conduisent aux suivantes :

$$(3)\qquad F(z)+f(-z)=0,$$

$$(4)\qquad F(l+z)=f(l-z).$$

En changeant z en $z+l$ dans l'équation (4), on obtient

$$F(2l+z)=f(-z),$$

et, d'après l'équation (3),

$$F(2l+z) = -F(z).$$

La fonction F ne reprend donc pas la même valeur quand la variable augmente de $2l$. Mais ces deux valeurs ne diffèrent que par le signe. Donc, si l'on augmente de nouveau la variable de $2l$, la fonction reprend identiquement sa première valeur. Elle est donc encore périodique, mais la période répond à l'intervalle $4l$ de la variable.

On reconnaîtrait la même propriété pour la fonction f, en changeant z en $z-l$ dans l'équation (4). Il suit de là que, dans le cas actuel, l'état du tuyau est encore périodique, mais que généralement il ne redevient le même qu'après un intervalle égal à $\frac{4l}{a}$, comme nous l'avions déjà démontré d'une autre manière.

Solution des questions précédentes au moyen de séries trigonométriques.

206. Nous allons maintenant traiter la question du mouvement de l'air, ou d'un gaz quelconque, dans un tuyau fini, au moyen d'une méthode très-féconde, et beaucoup plus commode dans la plupart des cas. Elle consiste à déterminer d'abord, non pas l'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles, mais un nombre infini d'intégrales particulières, que l'on assujettit à satisfaire chacune aux conditions relatives aux limites du système. Si l'on a eu soin de préparer les équations de manière à ce qu'elles ne renferment pas de termes indépendants de la fonction ou de ses dérivées, une somme d'intégrales particulières, multipliées respectivement par des constantes arbitraires, est encore une intégrale de l'équation indéfinie, et elle satisfait encore aux équations aux limites si chacune des pre-

mières y satisfait. Il ne s'agit donc plus que de déterminer les constantes en nombre infini, que renferme cette intégrale, de manière qu'en faisant $t = 0$ on obtienne l'état initial proposé. Nous allons reprendre, en suivant cette marche, la résolution des derniers problèmes.

1°. *Mouvement d'un gaz dans un cylindre fermé des deux côtés.* — En employant les mêmes notations que précédemment, il faudra satisfaire aux conditions

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = l, \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \quad \text{pour} \quad t = 0. \tag{4}$$

On reconnaît immédiatement qu'on satisfait à l'équation (1) en prenant

$$\varphi = (\text{M} \cos mx + \text{N} \sin mx)(\text{A} \sin amt + \text{B} \cos amt),$$

M, N, A, B, m étant des constantes arbitraires. Pour satisfaire à la condition (2), quel que soit t, il faut que la dérivée du facteur

$$\text{M} \cos mx + \text{N} \sin mx, \quad \text{ou} \quad -m(\text{M} \sin mx - \text{N} \cos mx),$$

soit nulle pour $x = 0$ et pour $x = l$, ce qui donne les deux équations

$$\text{N} = 0, \quad \sin ml = 0, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{n\pi}{l},$$

n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Mais on peut se borner aux valeurs positives, parce que les valeurs de φ correspondantes aux valeurs négatives de n

ne différeraient pas des premières, vu l'indétermination des coefficients.

Désignons par Σ une somme relative à toutes les valeurs entières et positives de n; supposons que A et B changent arbitrairement avec n, et supprimons le facteur M qui est inutile; nous aurons une intégrale plus générale de l'équation (1), satisfaisant aux conditions relatives aux extrémités du tuyau. Cette intégrale est

$$\varphi = \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l} \right).$$

Si nous différentions cette expression par rapport à x et t pour en déduire u et γ qui donnent la solution de la question, et que nous remplacions par A et B les constantes arbitraires $A\frac{n\pi}{l}$, $B\frac{n\pi}{l}$, nous aurons

$$(5) \qquad u = -\Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l} \right),$$

$$(6) \qquad a\gamma = -\Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left(A \cos \frac{an\pi t}{l} - B \sin \frac{an\pi t}{l} \right).$$

Si nous faisons $t = 0$ dans ces expressions, les équations (3) et (4) donneront, pour déterminer A et B, les conditions suivantes :

$$(7) \qquad \Sigma B \sin \frac{n\pi x}{l} = -\psi(x),$$

$$(8) \qquad \Sigma A \cos \frac{n\pi x}{l} = -a\chi(x).$$

Pour déterminer les coefficients B, nous développerons la fonction $\psi(x)$, qui est donnée de $x = 0$ à $x = l$ seulement, en série procédant suivant les sinus des multiples de x. C'est supposer que l'on ait

$$\psi(-x) = -\psi(x).$$

et cette condition peut être admise, puisque $\psi(x)$ est entièrement arbitraire en dehors des limites o et l. On fera usage, à cet effet, de la formule suivante (*Cours d'Analyse*) :

$$\varphi(x) = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin n\frac{\pi x}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin n\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

et l'on voit qu'on satisfera à la condition (7) en prenant

$$B = -\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin n\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Pour satisfaire à l'équation (8), il faudra faire usage d'une formule de développement où n'entrent que les cosinus des multiples de x; cela suppose que l'on ait

$$\chi(-x) = \chi(x),$$

et l'on peut s'assujettir à cette condition, puisque la fonction χ est arbitraire en dehors des limites o et l. On emploiera, à cet effet, la formule suivante (*Cours d'Analyse*):

$$\varphi(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos n\frac{\pi x}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\cos n\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Or, dans le cas actuel on a

$$\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\,d\alpha = -\frac{a}{l}\int\chi(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

car la condensation moyenne dans le gaz du tuyau est nulle, puisque les tranches extrêmes sont restées immobiles. On satisfera donc à la condition (8) en prenant, pour toute valeur entière de n, autre que zéro,

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\cos n\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Les formules (5) et (6) deviennent ainsi

$$(9)\quad u=\frac{2}{l}\Sigma\sin n\frac{\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} a\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l\chi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}d\alpha \\ +\cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}d\alpha\end{array}\right\},$$

$$(10)\quad \gamma=\frac{2}{l}\Sigma\cos n\frac{\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l\chi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}d\alpha \\ -\frac{1}{a}\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}d\alpha\end{array}\right\}.$$

On reconnaît immédiatement que si pour une même valeur de t on considère des valeurs de x, différant les unes des autres de la quantité $2l$, les valeurs de u et γ qui leur correspondent seront les mêmes. Ces fonctions sont donc périodiques relativement à x, et la période répond à l'étendue $2l$ sur l'axe des x. Si, de même, on laisse x constant, et que l'on fasse varier t de $\frac{2l}{a}$, u et γ conservent encore les mêmes valeurs; le mouvement de chaque point est donc périodique, et la durée de la période est $\frac{2l}{a}$.

Ces formules (9) et (10) sont celles que l'on obtiendrait pour un tuyau indéfini, en partant de l'état initial que l'on trouverait en faisant $t=0$. Cet état initial indéfini, et qui serait évidemment périodique, tiendrait lieu des conditions des extrémités.

207. Si l'on considère en particulier l'état initial pour lequel la série se réduirait à un seul terme, correspondant à une valeur quelconque n, on aura ce que l'on appelle un mouvement simple du système. Un état variable simple, dans toute théorie, est celui où le changement, quel qu'il soit, se fait en tous les points, proportionnellement à une même fonction du temps. Les rapports sont alors les mêmes à tout instant.

Dans les questions que nous traitons, ces états ne peuvent être que de la forme que nous avons choisie, vu que les exponentielles qui constitueraient la seconde forme possible, ne satisferaient pas aux conditions des extrémités. Ce mouvement sera représenté par des équations de la forme suivante :

$$u = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(\mathrm{P}\sin\frac{an\pi t}{l} + \mathrm{Q}\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = \cos\frac{n\pi x}{l}\left(\mathrm{P}\cos\frac{an\pi t}{l} - \mathrm{Q}\sin\frac{an\pi t}{l}\right).$$

La durée de la vibration est, dans ce cas, $\frac{2l}{na}$ au lieu de $\frac{2l}{a}$. Les valeurs de u sont nulles pour toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = 0,$$

et sont renfermées dans la formule

$$x = \frac{kl}{n},$$

k étant un nombre entier.

Les points où le gaz est immobile dans le tuyau, ou les *nœuds*, sont donc tous ses points de division en n parties égales.

Les points où la condensation est nulle, et qu'on appelle *ventres*, seront donnés par l'équation

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{(2k+1)l}{2n};$$

ils sont donc situés aux milieux des intervalles successifs des nœuds.

208. 2°. *Cas où le tuyau est ouvert à ses deux extrémités.* — Les équations relatives aux extrémités sont, dans

ce cas,

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = l.$$

Les autres équations sont les mêmes que dans le cas précédent, et l'on aura une valeur de φ satisfaisant à tout, excepté à l'état initial, en prenant

$$\varphi = \Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l} \right),$$

la somme Σ se rapportant à toutes les valeurs entières et positives de n; et A, B étant des constantes arbitraires, variant avec n.

On déduit de cette valeur de φ les expressions suivantes de u et γ, qui sont les seules dont on ait besoin et dans lesquelles les indéterminées A et B diffèrent par le facteur $\frac{n\pi}{l}$ de celles qui entrent dans φ :

$$u = \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l} \right),$$

$$a\gamma = - \Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A \cos \frac{an\pi t}{l} - B \sin \frac{an\pi t}{l} \right).$$

Pour que ces valeurs satisfassent à l'état initial, il faudra que l'on ait, entre les limites $x = 0$ et $x = l$, les deux identités suivantes :

$$\Sigma B \cos \frac{n\pi x}{l} = \psi(x),$$

$$\Sigma A \sin \frac{n\pi x}{l} = - a\chi(x),$$

ce qui montre d'abord que les fonctions ψ et χ doivent être périodiques par rapport à x, et que l'étendue de la période est $2l$; que, de plus, la fonction ψ conserve la même valeur quand on change x en $-x$, tandis que la fonction χ prend une valeur égale et de signe contraire, par ce même chan-

gement. Or, toutes ces conditions peuvent être admises, puisque ces fonctions sont arbitraires en dehors des limites $x = 0$, $x = l$.

Les deux équations précédentes donnent, pour une valeur quelconque de n,

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$B = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

La valeur de B, relative à $n = 0$, donnerait dans u le terme constant

$$\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\,d\alpha,$$

qui n'est autre chose que la valeur moyenne de $\psi(x)$ ou de u, ou la vitesse initiale du centre de gravité du gaz renfermé dans le tuyau. Si donc on suppose que ce gaz et le tuyau fini qui doit toujours le renfermer n'aient pas un mouvement uniforme de translation dans l'espace, ce terme est nul, et il suffira de considérer les valeurs de n depuis 1 jusqu'à l'infini; la solution du problème sera donc donnée par les formules suivantes :

$$u = \frac{2}{l}\Sigma\cos\frac{n\pi x}{l}\left\{\begin{aligned} &-a\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha\\ &+\cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha\end{aligned}\right\},$$

$$\gamma = \frac{2}{l}\Sigma\sin\frac{n\pi x}{l}\left\{\begin{aligned} &+\cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha\\ &+\frac{1}{a}\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha\end{aligned}\right\}.$$

On reconnaît immédiatement qu'à une même époque quel-

conque l'état du gaz est le même en des points dont la distance est $2l$. On voit, de plus, qu'en un même point quelconque l'état redevient le même après un temps égal à $\frac{2l}{a}$; que, par conséquent, les vibrations sont périodiques en chaque point, et que la durée de la période est $\frac{2l}{a}$, comme dans le cas où les deux extrémités sont fermées.

209. Si l'on considère l'un quelconque des mouvements simples qui peuvent avoir lieu, il sera représenté par les équations suivantes, où n désigne un nombre entier quelconque, et A, B des constantes arbitraires :

$$u = \cos\frac{n\pi x}{l}\left(A\sin\frac{an\pi t}{l} + B\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(B\sin\frac{an\pi t}{l} - A\cos\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Comme il n'y a qu'un seul arc, $\frac{an\pi t}{l}$, les valeurs de u et γ redeviendront les mêmes après un temps égal à $\frac{2l}{na}$.

Les ventres seront donnés par l'équation

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{kl}{n},$$

k désignant un nombre entier quelconque. Ces points partagent donc le tuyau en n parties égales. Les nœuds seront donnés par l'équation

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = (2k+1)\frac{l}{2n}.$$

Ces points sont donc situés aux milieux entre les ventres successifs.

210. 3°. *Cas d'un tuyau ouvert d'un côté et fermé de*

l'autre. — Supposons, en dernier lieu, que le tuyau soit ouvert à l'extrémité située à l'origine, et fermé à l'autre.

On devra avoir alors

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = l,$$

et l'on satisfera à toutes les conditions, excepté à celles de l'état initial, en prenant

$$\varphi = \Sigma \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ A \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + B \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right\},$$

A et B désignant des constantes arbitraires, variant avec n, et la somme Σ se rapportant à toutes les valeurs entières et positives de n. On déduit de là pour u et γ les valeurs suivantes, dans lesquelles A et B désignent de nouvelles indéterminées, qui diffèrent des précédentes par le facteur $\frac{(2n+1)\pi}{2l}$:

$$u = \Sigma \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ A \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + B \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right\},$$

$$a\gamma = -\Sigma \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ A \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} - B \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right\}.$$

Pour que ces expressions satisfassent à l'état initial, il faudra que l'on ait, entre les limites $x = 0$, $x = l$, les deux identités suivantes :

$$\Sigma B \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} = \psi(x),$$

$$\Sigma A \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} = -a\chi(x).$$

Ces équations exigent que les fonctions $\psi(x)$, $\chi(x)$, considérées dans l'étendue indéfinie de l'axe des x, soient

telles que, lorsqu'on y change x en $-x$, la première reste la même, et la seconde la même au signe près; que les valeurs $l+\alpha$ et $l-\alpha$, prises pour x, donnent pour $\psi(x)$ des valeurs égales et de signes contraires, et pour $\chi(x)$ des valeurs égales et de même signe; et qu'enfin ces fonctions soient périodiques par rapport à x, l'étendue de la période étant $4l$. Ces conditions peuvent être admises, puisque ces fonctions ne sont données qu'entre $x=0$, $x=l$, et cet état initial assurerait les conditions des extrémités en supposant le tuyau indéfini dans les deux sens et le gaz entièrement libre.

Les valeurs générales de A et B, propres à satisfaire aux équations précédentes, sont

$$B=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha,$$

$$A=-\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha.$$

La solution de la question sera donc donnée par les formules suivantes :

$$u=\frac{2}{l}\Sigma\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\begin{aligned}&-a\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int_0^l\chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha\\&+\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int_0^l\psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha\end{aligned}\right\},$$

$$\varphi=\frac{2}{l}\Sigma\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\begin{aligned}&+\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int_0^l\chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha\\&+\frac{1}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int_0^l\psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha\end{aligned}\right\},$$

les sommes Σ se rapportant à toutes les valeurs positives et entières de n depuis 0 jusqu'à l'infini.

Ces expressions sont périodiques par rapport à x et t,

dans un intervalle $2l$ pour x, et $\frac{4l}{a}$ pour t. La durée de la période est donc double, dans ce cas, de ce qu'elle était dans les deux cas précédents, et le son fondamental rendu par ce tuyau est d'une octave au-dessous de celui que rendrait un tuyau de même longueur, ouvert ou fermé des deux côtés.

211. Si l'on considère le mouvement simple correspondant à une valeur unique quelconque de n, la durée de la période sera $\frac{4l}{(2n+1)a}$.

Les nœuds seront donnés par les racines de l'équation

$$\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 0,$$

qui sont représentées par la formule

$$x = \frac{(2k+1)l}{2n+1},$$

k désignant un nombre entier. Les distances des nœuds à l'origine sont donc respectivement

$$\frac{l}{2n+1},\quad \frac{3l}{2n+1},\quad \frac{5l}{2n+1},\ldots,\quad l,$$

ils sont distants les uns des autres de $\frac{2l}{2n+1}$, et, par conséquent, à partir du premier, on a comme une suite de tuyaux d'une longueur égale à $\frac{2l}{2n+1}$, et dont les deux extrémités seraient immobiles et pourraient, par conséquent, être considérées comme fermées.

Les ventres ont pour abscisses les racines de l'équation

$$\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 0;$$

ces racines sont représentées par la formule suivante, dans laquelle k désigne un nombre entier indéterminé :

$$x = \frac{2kl}{2n+1}.$$

Les distances des ventres à l'origine, dans toute l'étendue du tuyau, sont donc respectivement

$$0, \quad \frac{2l}{2n+1}, \quad \frac{4l}{2n+1}, \ldots, \quad \frac{2nl}{2n+1}.$$

Ce sont encore les points milieux entre les nœuds successifs; ils sont distants les uns des autres de $\frac{2l}{2n+1}$, et le gaz compris entre deux ventres consécutifs est dans le même cas que s'il se trouvait dans un tuyau ouvert aux deux bouts, qui aurait pour longueur $\frac{2l}{2n+1}$.

Du mouvement dans un gaz indéfini dans tous les sens.

212. Considérons maintenant les petits mouvements des molécules d'un gaz homogène indéfini dans tous les sens; nous aurons l'équation précédemment démontrée

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

Il n'y aura, dans ce cas, aucune condition aux limites, puisque le fluide s'étend à l'infini dans tous les sens; mais il faudra toujours satisfaire à l'état initial, ce qui exige que $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ deviennent des fonctions données arbitrairement des variables x, y, z, lorsqu'on y fait $t = 0$, Or, les trois dérivées partielles d'une fonction x, y, z étant données, la fonction elle-même est connue à une constante près dont il est inutile de tenir compte dans la question ac-

tuelle; d'où il suit que l'état initial étant donné, on connaît les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$. Ainsi, en désignant par F et f des fonctions arbitraires de x, y, z, les conditions de l'état initial seront exprimées par les équations

$$(2) \quad \varphi = f(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z), \quad \text{pour} \quad t = 0;$$

la question se réduit donc à satisfaire aux équations (1) et (2). C'est ce que l'on fera au moyen de la formule suivante, qui a été donnée par Poisson :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t \sin\theta \, d\theta \, d\psi \, F \begin{pmatrix} x + at\cos\theta, \; y + at\sin\theta\cos\psi, \\ z + at\sin\theta\sin\psi \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t \sin\theta \, d\theta \, d\psi \, f \begin{pmatrix} x + at\cos\theta, \; y + at\sin\theta\cos\psi, \\ z + at\sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Les intégrations, par rapport à θ, sont faites entre les limites 0 et π, et celles par rapport à ψ, entre 0 et 2π. Cette valeur de φ peut encore être écrite comme il suit :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi} \mathrm{S} \, t \, d\omega \, F(x + at\cos\alpha, \; y + at\cos\beta, \; z + at\cos\gamma) \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \mathrm{S} \, t \, d\omega \, f(x + at\cos\alpha, \; y + at\cos\beta, \; z + at\cos\gamma), \end{aligned} \right.$$

$d\omega$ désignant un élément infiniment petit de la surface sphérique décrite de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité; α, β, γ désignant les angles formés par le rayon vecteur mené de l'origine à un point de cet élément, et les sommes S se rapportant à tous les éléments de la surface de la sphère.

Cette importante formule est d'une application très-commode lorsque les fonctions F et f sont données, comme dans le cas actuel, pour toutes les valeurs réelles des variables x, y, z; mais si le fluide était limité, les conditions

particulières qui en résulteraient deviendraient très-difficiles à exprimer, et l'on serait obligé de prendre d'autres formes pour l'intégrale de l'équation (1). Nous ne nous occuperons pas de ce dernier cas. La formule (3) donne la solution complète de la question, puisqu'elle donne la fonction φ, et par conséquent la condensation et les composantes de la vitesse en un point quelconque et à une époque quelconque. Nous nous bornerons à en déduire la vitesse avec laquelle un ébranlement quelconque se propage dans le fluide, et, pour que les résultats soient d'une interprétation plus facile et plus claire, nous supposerons que cet ébranlement n'ait lieu que dans une portion infiniment petite dans tous les sens, dans l'intérieur de laquelle on ait pris l'origine des coordonnées.

Dans ce cas, les fonctions $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ seront nulles pour toutes les valeurs de x, y, z qui ne seront pas les coordonnées de l'un des points de la partie ébranlée, coordonnées qui seront toutes infiniment petites. Si donc nous posons

$$(5)\quad x + at\cos\alpha = x', \quad y + at\cos\beta = y', \quad z + at\cos\gamma = z',$$

la valeur de φ ne sera différente de zéro pour le point M qui a pour coordonnées x, y, z, que lorsque la valeur de t sera telle, que x', y', z' puissent être, pour des valeurs convenables de α, β, γ, les coordonnées de points situés dans la partie primitivement ébranlée; et ces valeurs de α, β, γ sont les seules qu'il y ait à considérer dans les intégrales définies qui entrent dans l'expression de φ.

Il est facile de se représenter géométriquement les directions correspondantes à ces valeurs de α, β, γ ou de θ et ψ, qui ne donnent pas des éléments nuls dans les intégrales. En effet, le point dont les coordonnées sont les valeurs de x', y', z' données par les équations (5), se construit en portant, à partir de M, une longueur égale à at sur la direction corres-

pondante aux angles α, 6, γ. Si donc on décrit une sphère du point M comme centre avec at pour rayon, les points de sa surface qui se trouveront compris dans l'ébranlement primitif seront les seuls pour lesquels les fonctions f et F ne seront pas nulles; et les directions des rayons vecteurs menés du point M à ces divers points, sont les seules auxquelles il soit nécessaire d'avoir égard. D'où l'on voit que la fonction φ sera nulle jusqu'à ce que la surface de la sphère, qui a M pour centre, et pour rayon la variable at, commence à pénétrer dans l'ébranlement primitif; et qu'elle redeviendra nulle lorsque cette surface, dont le rayon croît uniformément, cessera de le traverser; et à chacune des époques intermédiaires, la seule partie de l'ébranlement qui détermine la valeur de φ est celle qui se trouve sur la sphère de rayon at.

La conséquence immédiate de cette proposition est qu'un ébranlement infiniment petit dans tous les sens se propage dans toutes les directions avec une même vitesse égale à a, puisque, au bout du temps t, les points situés à la distance at commencent à se mettre en mouvement.

La durée précise de l'ébranlement en un point quelconque N est déterminée par les deux sphères décrites de ce point comme centre, et qui sont telles, que la partie ébranlée soit tout entière hors de la première et tout entière dans la seconde, en ayant un point commun avec la surface de l'un et de l'autre.

La vitesse de propagation du mouvement dans un gaz homogène, indéfini dans tous les sens, est donc la même que dans un tuyau cylindrique.

De l'équilibre et des mouvements infiniment petits d'un fil élastique.

213. L'analogie de cette question avec les précédentes

nous a déterminé à la placer à la suite, quoiqu'elle ne se rapporte pas au mouvement des fluides.

Jusqu'ici nous avons considéré les fils comme inextensibles, ce qui est purement fictif; nous supposerons maintenant qu'ils soient susceptibles de s'allonger sous l'influence de forces qui y produisent une tension quelconque, et nous resterons dans des limites telles, que le fil ne se rompe pas et reprenne sa première longueur quand la force cesse d'agir. Dans ces limites, l'expérience démontre que l'allongement est proportionnel à l'accroissement de la tension.

Nous appellerons *état naturel* du fil celui dans lequel il se trouve quand il n'est sollicité par aucune force. Considérons, dans cet état, une longueur d'un fil homogène, égale à l'unité, et produisons dans ce fil une tension égale à l'unité de force; il s'allongera d'une certaine quantité δ, qui est une donnée nécessaire dans toutes les questions auxquelles il peut donner lieu. Si une tension égale à l'unité était en dehors des limites dont nous avons parlé ci-dessus, on ne la produirait pas réellement dans le fil; mais, pour l'uniformité des notations, nous supposerons toujours que l'on donne la quantité δ dont s'allongerait l'unité de longueur du fil, soumise à une tension égale à l'unité, en suivant les mêmes lois que dans les limites de son élasticité. Seulement on devra examiner, dans chaque application particulière, si l'on ne sort pas de ces limites, auquel cas les résultats de l'expérience ne pourraient s'accorder avec ceux qu'indiqueraient nos calculs.

214. Soit AB (*fig.* 16) un fil élastique homogène, dont les extrémités A et B sont fixes, et qui éprouve une tension τ lorsqu'il n'est soumis à aucune action extérieure, et que, par conséquent, tous ses points sont dans la droite AB: soit ε la masse de l'unité de longueur. Prenons le point A pour origine d'axes de coordonnées rectangulaires, et don-

nons à l'axe des x la direction AB. Désignons par X, Y, Z les composantes de la force appliquée à tous les points du fil, et rapportée à l'unité de masse : la question est de déterminer, pour un point quelconque du fil, les valeurs de ses trois coordonnées, qui seront constantes dans le cas de l'équilibre, et fonctions du temps t dans le cas du mouvement.

Considérons un point quelconque P du fil, dans l'état primitif où il ne s'exerce sur lui aucune action extérieure. Sous l'influence des forces X, Y, Z qui agissent sur tous ses points, il y aura un déplacement général : soit M la position, à un instant quelconque, du point matériel situé primitivement en P ; nous allons commencer par chercher l'expression générale de la tension du fil à ce point M. Pour cela, considérons de même un second point Q, situé dans l'état primitif à une distance infiniment petite α de P, et qui se trouve en N à l'intant où P est en M ; l'excès de la longueur MN sur PQ, étant divisé par PQ ou α, donnera l'allongement, rapporté à l'unité de longueur, qu'a subi le fil dans le voisinage du point P ; et il sera facile d'en déduire l'accroissement de la tension.

Désignons par x l'abscisse AP du point P dans l'état primitif, et par $x+u$, y, z les coordonnées de M ; les trois quantités infiniment petites u, y, z seront les inconnues de la question ; elles seront des fonctions de x dans le cas de l'équilibre, et des fonctions de x et t dans le cas du mouvement ; x est constant dans le mouvement du même point matériel, et change quand on passe d'une molécule à une autre.

La différence MN — PQ étant très-petite par rapport à PQ, on ne pourra négliger dans son expression que les quantités très-petites du second ordre par rapport à PQ. Or, en ne considérant que les cas où les angles des divers éléments du fil avec l'axe des x restent très-petits, on pourra

négliger la différence entre MN et sa projection sur l'axe des x : et, par conséquent, si l'on désigne par u' ce que devient u au point Q, on pourra écrire

$$MN - PQ = u' - u.$$

Mais u' n'étant autre chose que u dans lequel on remplace x par $x + \alpha$, on aura

$$u' - u = \frac{du}{dx}\alpha,$$

en négligeant les termes infiniment petits par rapport au premier. En divisant cet accroissement par α, on aura, d'après ce qui a été dit, l'allongement positif ou négatif, rapporté à l'unité de longueur, qu'a subi le fil au point dont l'abscisse est x dans l'état primitif ; l'expression de cet allongement est $\frac{du}{dx}$. Or, l'accroissement de longueur étant proportionnel à l'accroissement de tension, ce dernier aura pour valeur $\frac{1}{\delta}\frac{du}{dx}$, et, par conséquent, si nous désignons par T la tension qui a lieu au point M à un instant quelconque, on aura

$$T = \tau + \frac{1}{\delta}\frac{du}{dx}.$$

Connaissant maintenant l'expression générale de la tension, on suivra la même marche que dans le cas des fils non élastiques. On considérera un élément infiniment petit MN, et l'on cherchera d'abord toutes les forces extérieures qui agissent sur lui. Ces forces sont les tensions en M et N, dirigées en dehors de l'élément, et les forces X, Y, Z dont la valeur n'a pas changé sensiblement par le déplacement infiniment petit des points ; ces dernières donneront pour l'élément PQ, et, par conséquent, pour MN, les trois composantes

$$\alpha\varepsilon X, \quad \alpha\varepsilon Y, \quad \alpha\varepsilon Z.$$

Soient maintenant λ, μ, ν les angles que fait avec les axes

la direction MS de la tangente; les composantes de la force qui agit en M sur l'élément MN seront

$$-\mathrm{T}\cos\lambda, \quad -\mathrm{T}\cos\mu, \quad -\mathrm{T}\cos\nu,$$

et les composantes de celle qui agit en N seront

$$\mathrm{T}\cos\lambda + d.\mathrm{T}\cos\lambda, \quad \mathrm{T}\cos\mu + d.\mathrm{T}\cos\mu, \quad \mathrm{T}\cos\nu + d.\mathrm{T}\cos\nu.$$

Or, soit que l'on considère l'élément MN comme rigide ou comme variable, le mouvement de son centre de gravité sera toujours le même que si toute sa masse y était réunie, et que toutes les forces qui le sollicitent y fussent appliquées. D'ailleurs, le mouvement de ce centre de gravité diffère aussi peu qu'on voudra de celui du point M; les équations du mouvement de ce dernier peuvent donc être considérées comme ne différant pas des suivantes :

$$d.\mathrm{T}\cos\lambda + \alpha\varepsilon\mathrm{X} = \alpha\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$d.\mathrm{T}\cos\mu + \alpha\varepsilon\mathrm{Y} = \alpha\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$d.\mathrm{T}\cos\nu + \alpha\varepsilon\mathrm{Z} = \alpha\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si l'on divise tous les termes de ces équations par α et qu'on passe à la limite, les premiers termes deviendront respectivement les dérivées, par rapport à x, des trois quantités

$$\mathrm{T}\cos\lambda, \quad \mathrm{T}\cos\mu, \quad \mathrm{T}\cos\nu.$$

Or, on pourra d'abord remplacer $\cos\lambda$ par 1, en négligeant les quantités très-petites du second ordre; ce qui donnera

$$\frac{d.\mathrm{T}\cos\lambda}{dx} = \frac{1}{\delta}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Quant à $\cos\mu$ et $\cos\nu$, leurs valeurs sont très-petites du premier ordre, et comme il en est de même de u et $\frac{du}{dx}$, on

pourra réduire $T\cos\mu$, $T\cos\nu$ à $\tau\cos\mu$, $\tau\cos\nu$. Si maintenant on désigne par dy, dz les différences des coordonnées y, z des deux points infiniment voisins M, N, et par dx la différence PQ de leurs x, on aura

$$\cos\mu = \frac{dy}{MN}, \quad \cos\nu = \frac{dz}{MN},$$

et comme MN ne diffère de PQ ou dx que d'une quantité infiniment petite par rapport à dx, on pourra poser

$$\cos\mu = \frac{dy}{dx}, \quad \cos\nu \frac{dz}{dx},$$

d'où il résultera

$$\frac{d.T\cos\mu}{dx} = \tau\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d.T\cos\nu}{dx} = \tau\frac{d^2z}{dx^2},$$

et les équations du mouvement du fil seront

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = X + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{d^2u}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2z}{dx^2}. \end{cases}$$

Les équations d'équilibre du fil, sous l'action des forces X, Y, Z, seront donc

$$(2) \quad \begin{cases} X + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0, \\ Y + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \\ Z + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2z}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

Si les forces X, Y, Z sont nulles, ou fonctions de t et x seulement, les équations (1) montrent que les fonctions u, y, z peuvent être calculées indépendamment les unes des

autres. Ainsi le mouvement longitudinal, déterminé par u, sera indépendant du mouvement transversal, déterminé par y et z.

Si les forces X, Y, Z sont nulles, les équations (1) se réduisent à

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{\delta\varepsilon}\,\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\tau}{\varepsilon}\,\frac{d^2y}{d^2x^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\tau}{\varepsilon}\,\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Elles sont toutes les trois de même forme que celles qui déterminent le mouvement d'un gaz dans un tuyau cylindrique, et elles donneraient lieu à des questions analogues à celles que nous avons résolues avec détail dans la théorie du mouvement des gaz. On trouverait ainsi que la vitesse de propagation dans le sens longitudinal est $\sqrt{\frac{1}{\delta\varepsilon}}$, et qu'elle est $\sqrt{\frac{\tau}{\varepsilon}}$ dans le sens perpendiculaire. On trouverait encore que la durée des vibrations longitudinales du fil ayant la longueur l est $2l\sqrt{\delta\varepsilon}$, et l'on voit qu'elle est indépendante de la tension du fil; la durée des vibrations transversales sera $2l\sqrt{\frac{\varepsilon}{\tau}}$. Elle est indépendante de δ.

Vibrations longitudinales des verges.

215. On peut remarquer que l'équation qui détermine u a été obtenue sans supposer que le fil fût flexible et d'une petite épaisseur. Elle aurait lieu, par conséquent, pour une verge élastique dans laquelle on ne considérerait que des mouvements longitudinaux, qui seraient les mêmes pour

tous les points d'une même section transversale. L'allongement δ que subit l'unité de longueur, sous l'action d'une force égale à l'unité, variera en raison inverse de l'aire de la section transversale; mais la masse ε de l'unité de longueur variera proportionnellement à cette même aire; de sorte que le produit $\delta\varepsilon$ sera indépendant de l'épaisseur de la verge.

Lorsque les extrémités de la verge seront fixes, la durée des vibrations longitudinales sera toujours $2l\sqrt{\delta\varepsilon}$, comme nous l'avons trouvée tout à l'heure dans le cas du fil élastique. Mais on peut encore se proposer de déterminer le mouvement de ces différents points lorsque ses deux extrémités seront libres, ou lorsque l'une sera libre et l'autre fixe.

La tension de la verge sera invariable à l'extrémité libre, et l'on devra, par conséquent, avoir constamment $\frac{du}{dx} = 0$ en ce point. Ces deux nouvelles questions n'offriront pas plus de difficulté que la première, où l'on a supposé les deux extrémités fixes. On trouvera que si les deux extrémités sont libres, la durée des vibrations longitudinales est la même que si elles sont toutes deux fixes; mais que, si l'une est fixe et l'autre libre, la durée des vibrations est double. Il y a donc une analogie complète entre les vibrations longitudinales des verges et celles des gaz renfermés dans des tuyaux cylindriques; une extrémité fixe de la verge correspondant à une extrémité fermée dans le tuyau, et une extrémité libre à une extrémité ouverte.

Des petits mouvements d'un système quelconque de points.

216. Considérons un système quelconque de points assujettis à des liaisons exprimées par des équations entre leurs coordonnées, et dans un état d'équilibre stable, sous l'in-

fluence de forces qui dépendent d'une manière quelconque de ces mêmes coordonnées. Si l'on écarte très-peu ces points de leur position d'équilibre, en leur imprimant de très-petites vitesses, et qu'on les abandonne ensuite à l'action des forces données, les accroissements des coordonnées resteront toujours très-petits, puisque l'équilibre était stable. Nous allons nous proposer de déterminer ces accroissements en fonction du temps, et de reconnaître quelques propriétés générales dont ils jouissent.

Soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points du système à un instant quelconque; a, b, c leurs valeurs dans la position d'équilibre, et m la masse de ce point; posons

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma,$$

α, β, γ seront des quantités très-petites, variables avec le temps, et dont dépendra à chaque instant la position du point m.

Nous aurons de même, pour un second point m',

$$x' = a' + \alpha', \quad y' = b' + \beta', \quad z' = c' + \gamma',$$

et ainsi de suite pour tous les autres.

Soient X, Y, Z les composantes de la force appliquée au point m; X', Y', Z' celles de la force appliquée à m', et ainsi de suite. Enfin, soient

$$(1) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

les équations données entre les coordonnées x, y, z, x', y',.... On demande les équations qui détermineront les quantités très-petites α, β, γ, α', β',..., en fonction du temps t.

Si l'on remplace x, y,..., par $a + \alpha$, $b + \beta$,..., dans les équations précédentes, on pourra se borner dans les développements aux termes qui renferment les premières

puissances de α, β, γ,.... En observant d'ailleurs que les coordonnées a, b, c,..., satisfont à ces mêmes équations, on aura ainsi, en désignant par $\frac{dL}{da}$, $\frac{dL}{db}$,..., les dérivées par rapport à x, y,.... dans lesquelles on remplace x, y,.. par a, b,...,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dL}{da}\alpha + \frac{dL}{db}\beta + \frac{dL}{dc}\gamma + \frac{dL}{da'}\alpha' + \ldots = 0, \\ \frac{dM}{da}\alpha + \frac{dM}{db}\beta + \frac{dM}{dc}\gamma + \frac{dM}{da'}\alpha' + \ldots = 0, \\ \frac{dN}{da}\alpha + \frac{dN}{db}\beta + \frac{dN}{dc}\gamma + \frac{dN}{da'}\alpha' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Désignons par A, B, C, A',... les valeurs des fonctions X, Y, Z, X',... dans les positions d'équilibre de tous les points; on aura, dans une position voisine quelconque,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} X = A + \frac{dX}{da}\alpha + \frac{dX}{db}\beta + \frac{dX}{dc}\gamma + \frac{dX}{da'}\alpha' + \ldots, \\ Y = B + \frac{dY}{da}\alpha + \frac{dY}{db}\beta + \frac{dY}{dc}\gamma + \ldots, \\ Z = C + \frac{dZ}{da}\alpha + \frac{dZ}{db}\beta + \ldots, \\ X' = A' + \frac{dX'}{da}\alpha + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

L'équation générale qui détermine le mouvement du système sera, en observant que l'on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \ldots,$$

$$(4)\quad \sum\left\{\begin{array}{l} \left(X - m\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\delta y \\ \qquad + \left(Z - m\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\delta z \end{array}\right\} = 0,$$

les quantités δx, δy, δz, $\delta x'$,... satisfaisant aux conditions

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \ldots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \ldots = 0, \\ \dfrac{dN}{dx}\delta x + \dfrac{dN}{dy}\delta y + \dfrac{dN}{dz}\delta z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dans ces équations (5), les coefficients diffèrent de ceux des équations (2) de quantités linéaires en α, β, γ,....

Ainsi, par exemple, on a

$$\frac{dL}{dx} = \frac{dL}{da} + \frac{d^2L}{da^2}\alpha + \frac{d^2L}{da\,db}\beta + \ldots,$$

et de même des autres. Les équations (5) déterminent un certain nombre de δ en fonctions linéaires des autres, qui resteront entièrement arbitraires. Les coefficients qui affecteront ces derniers dans ces fonctions pourront se décomposer en deux parties : l'une finie, que l'on obtiendrait en faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, etc., et l'autre qui renfermera linéairement les quantités très-petites α, β, γ,.... En se bornant à la première partie, on aurait évidemment l'expression des δ relatifs à la position d'équilibre du système.

Cela posé, si l'on substitue dans l'équation (4) les δ tirés des équations (5), il faudra égaler à zéro les coefficients de tous ceux qui resteront et seront entièrement arbitraires. Mais il est facile de voir que ces coefficients pourront toujours être réduits à deux parties : l'une finie, et qui sera la même que si les forces X, Y, Z,..., et les fonctions $\dfrac{dL}{dx}$,... avaient les valeurs relatives à la position d'équilibre ; l'autre renfermant linéairement α, β, γ,..., $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$,..., les pro-

duits de ces dernières quantités entre elles étant toujours négligés. Mais la première partie est nulle dans chacune de ces équations en vertu de l'équilibre; il ne reste donc que la seconde, dans laquelle les quantités α, 6, γ,..., $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2 6}{dt^2}$,... entrent linéairement à tous les termes.

Les équations ainsi obtenues devront être jointes aux équations (2); ces dernières déterminent un certain nombre des inconnues α, 6, γ, α',... en fonctions linéaires des autres; et si l'on suppose qu'on élimine ainsi celles dont les indices sont les plus élevés, et qu'on résolve ensuite les équations restantes, par rapport aux dérivées secondes, on arrivera définitivement à un système d'équations de la forme suivante, en même nombre que les inconnues α, 6, γ, α'... :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = m\alpha + m_1 6 + m_2\gamma + m_3\alpha' + \ldots, \\ \frac{d^2 6}{dt^2} = n\alpha + n_1 6 + n_2\gamma + n_3\alpha' + \ldots, \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} = p\alpha + p_1 6 + p_2\gamma + p_3\alpha' + \ldots, \\ \frac{d^2\alpha'}{dt^2} = m'\alpha + m'_1 6 + m'_2\gamma + m'_3\alpha' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

217. Il sera quelquefois utile d'exprimer les quantités α, 6, γ, α',... au moyen d'autres variables indépendantes u, v, w,..., très-petites comme les premières, et il est facile de reconnaître que les équations en u, v, w,..., seront de même forme que les équations (6); car les expressions des quantités α, 6,... au moyen de u, v, w,... ne renfermeront que des termes où entreront les premières puissances de ces dernières; et si l'on substitue ces expressions et leurs

dérivées secondes par rapport à t dans les équations (6), on aura de nouvelles équations linéaires qui donneront pour $\frac{d^2 u}{dt^2}$, $\frac{d^2 v}{dt^2}$,... des expressions renfermant linéairement à tous leurs termes les quantités u, v, w,....

218. *Superposition des mouvements.* — La forme des équations (6) conduit à une conséquence très-importante.

On reconnaît immédiatement que si plusieurs systèmes de valeurs de α, β, γ,... y satisfont séparément, et que l'on ajoute ensemble toutes les valeurs de α dans ces différents systèmes, que l'on ajoute de même entre elles toutes les valeurs de β, et ainsi de suite, on formera un nouveau système qui satisfera aux mêmes équations. Quant à l'état initial des points dans le mouvement représenté par ce dernier système, on voit qu'il résulte de la superposition des états initiaux correspondants aux systèmes partiels; c'est-à-dire que les composantes des déplacements et des vitesses parallèlement aux axes, dans ces derniers, s'ajoutent algébriquement pour former les composantes relatives à l'autre système. Cette addition des composantes revient à la composition des déplacements et des vitesses suivant les règles relatives aux forces, ce qui ne présentera jamais aucune difficulté, quel que soit le système des coordonnées.

Ainsi, la superposition de plusieurs états initiaux détermine un mouvement tel, que le déplacement des points à une époque quelconque résulte de la superposition de ceux qui, à la même époque, s'observeraient dans les mouvements correspondants aux états initiaux partiels.

Et, par conséquent, lorsqu'un système de points, assujettis à des liaisons quelconques, et soumis à l'action de forces quelconques, est écarté infiniment peu d'une position d'équilibre stable, puis abandonné à lui-même, les déplacements de ces différents points à une époque quelcon-

que pourront toujours être considérés comme résultant de la composition de ceux que l'on observerait à la même époque dans d'autres mouvements du même système, en nombre quelconque, et assujettis à cette seule condition, que la composition de leurs états initiaux, sous le rapport des déplacements et des vitesses, donne pour résultat l'état initial proposé.

219. *Application au pendule conique.* — Pour faire comprendre de suite l'utilité de ce principe, nous allons en faire l'application à un cas très-simple, que nous avons déjà traité par une autre méthode.

Considérons un point matériel pesant, assujetti à rester à une distance constante d'un point fixe, et que l'on écarte infiniment peu de la verticale menée par ce point, en lui imprimant une très-petite vitesse horizontale. Ce problème a été résolu dans les nos 319, 320 du premier volume de cet ouvrage; nous emploierons les mêmes notations pour la nouvelle solution que nous allons en donner.

Nous prenons pour origine le point fixe A (*fig.* 18), pour axe des z la direction de la pesanteur, et nous ferons passer le plan des x, z par la position initiale AB du pendule. Soient M la position du point matériel à une époque quelconque, P sa projection sur XY, C celle de B. Posons

$$\mathrm{BAZ} = \alpha, \quad \mathrm{MAZ} = \theta, \quad \mathrm{PAX} = \psi, \quad \mathrm{AM} = a, \quad \mathrm{AP} = r,$$

et désignons par k la vitesse initiale.

Nous ramènerons la question à deux autres plus simples en décomposant l'état initial dans les deux suivants. Dans le premier, nous supposerons le point matériel placé en B sans vitesse; et, dans le second, nous le supposerons dans la verticale AZ, et animé de la vitesse initiale donnée. La composition des déplacements à une époque quelconque, dans ces deux mouvements indépendants l'un de l'autre,

fera connaître le déplacement cherché du point M pour la même époque.

Si, dans le premier mouvement, nous désignons par φ l'angle variable formé par le pendule avec AZ, nous aurons (n° 308, tome I[er]), au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons,

$$(a) \qquad \varphi = \alpha \cos . t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Dans le second mouvement, soit ω l'angle formé par le pendule avec AZ, et supposons que la direction de l'axe des y ait été choisie de telle sorte que la vitesse initiale k porte le pendule dans l'angle ZAY, correspondant aux valeurs positives de ω; nous aurons alors

$$(b) \qquad \omega = \frac{k}{\sqrt{gl}} \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}} = 6 \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

en posant $\frac{k^2}{gl} = 6^2$.

Les équations (a) et (b), faisant connaître la position du point à chaque instant, déterminent toutes les circonstances de son mouvement.

220. Si l'on veut connaître les coordonnées rectangulaires du point M, il faudra calculer son x au moyen de l'équation (a), et son y par l'équation (b). La troisième coordonnée ne diffère de l que d'une quantité du second ordre. On la déduirait des deux premières au moyen de l'équation de la sphère; mais il est inutile de s'en occuper.

Or, on a

$$x = l \sin \varphi, \qquad y = l \sin \omega,$$

ou, en négligeant les quantités très-petites du troisième ordre,

$$x = l\varphi, \qquad y = l\omega.$$

On aura donc d'abord

$$(c) \qquad x = l\alpha \cos . t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad y = l6 \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

et, comme $\tang \psi = \frac{y}{x}$, il en résultera

$$\tang \psi = \frac{6}{\alpha} \tang . t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

La valeur de r, ou AP, se déduit des équations (c), en observant que $r^2 = x^2 + y^2$; il en résulte

$$r^2 = l^2 \left(\alpha^2 \cos^2 . t \sqrt{\frac{g}{l}} + 6^2 \sin^2 . t \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

On en déduira la valeur de l'angle θ dont le sinus est $\frac{r}{l}$; on obtiendra ainsi

$$\theta^2 = \alpha^2 \cos^2 . t \sqrt{\frac{g}{l}} + 6^2 \sin^2 . t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Enfin, si l'on veut connaître la projection de la trajectoire sur le plan x, y, il faudra éliminer t entre les équations (c), et l'on trouvera

$$\alpha^2 y^2 + 6^2 x^2 = l^2 \alpha^2 6^2,$$

ellipse dont les demi-axes sont $l\alpha$, $l6$.

Tous ces résultats coïncident avec ceux qui avaient été obtenus dans les numéros déjà cités du premier volume. Il serait très-facile de généraliser cette question sous plusieurs rapports.

Ainsi, d'abord, on pourrait supposer la vitesse initiale dans une direction quelconque sur la surface de la sphère. On la décomposerait alors en deux autres, l'une horizontale, l'autre dans le plan vertical passant par la position initiale. On aurait alors à considérer deux mouvements

simples qui ne différeraient des précédents qu'en ce que dans l'état initial de l'un d'eux il y aurait à la fois déplacement et vitesse.

Si le point pesant, au lieu d'être situé sur une sphère, était sur un ellipsoïde ayant un de ses axes principaux suivant la verticale, on décomposerait le déplacement initial en deux autres, parallèles aux deux axes horizontaux, et la vitesse initiale en deux autres, parallèles aux plans principaux. On chercherait alors le mouvement résultant du déplacement et de la composante de la vitesse, parallèlement à l'un des plans; ce qui ramènerait à un mouvement sur le cercle osculateur de cette ellipse principale. On chercherait ensuite le mouvement sur le cercle osculateur de la seconde section, d'après le déplacement et la composante de la vitesse parallèlement au second plan. On serait ainsi ramené à deux mouvements simples, que l'on composerait comme dans le cas précédent.

Enfin, si le point pesant était situé sur une surface quelconque, et très-peu écarté du point où le plan tangent est horizontal, on remplacerait cette surface par un ellipsoïde passant par ce point et ayant ses sections principales de même courbure et de même direction que celles de la surface en ce même point; et le problème serait le même que le précédent.

221. *Du cas où l'on introduit de nouvelles forces.* — Nous avons obtenu les équations (6) en supposant seulement que les points du système aient été dérangés de leur position d'équilibre, et qu'on leur ait communiqué certaines vitesses initiales. Mais on généraliserait la question en introduisant de nouvelles forces, susceptibles de ne produire que des déplacements très-petits. C'est ce que nous allons faire maintenant, en supposant toutefois que ces forces soient indépendantes du temps ainsi que des quantités

α, β, γ,.... On arrive, dans ce cas, à des résultats généraux qui méritent d'être remarqués.

Il est facile de voir d'abord que les équations différentielles de ce nouveau mouvement ne différeront des équations (6) que par l'addition de termes constants. En effet, il faudra dans l'équation (4) augmenter X, Y, Z,..., des composantes respectives des nouvelles forces, et, en continuant le calcul comme précédemment, on voit que les seconds membres des équations (6) se trouveront seulement augmentés de termes qui renfermeront chacun une de ces composantes au premier degré.

Les équations différentielles de la question actuelle seront donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \mathrm{H} + m\alpha + m_1\beta + m_2\gamma + m_3\alpha' + \ldots, \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= \mathrm{K} + n\alpha + n_1\beta + \ldots, \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \mathrm{L} + p\alpha + p_1\beta + \ldots, \\ \frac{d^2\alpha'}{dt^2} &= \mathrm{H}' + m'\alpha + m'_1\beta + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces équations feront connaître α, β, γ,... en fonction de t, et les constantes arbitraires seront déterminées par l'état initial. Elles peuvent aussi faire connaître le nouvel état d'équilibre du système, après l'introduction des nouvelles forces. En effet, il suffit de supposer α, β, γ,... constants dans les équations (7); leurs seconds membres se trouvent alors égaux à zéro, et donneront les valeurs cherchées des déplacements de tous les points, qui conviennent au nouvel équilibre.

222. Les équations (7) peuvent être ramenées à la même

forme que les équations (6), en posant

$$(8)\quad \alpha = \alpha_1 + \xi,\quad 6 = 6_1 + \eta,\quad \gamma = \gamma_1 + \zeta,\quad \alpha' = \alpha'_1 + \xi',\ldots,$$

α_1, 6_1, $\gamma_1,\ldots$ étant des constantes déterminées par les équations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} H + m\alpha_1 + m_1 6_1 + m_2\gamma_1 + \ldots = 0, \\ K + n\alpha_1 + n_1 6_1 + n_2\gamma_1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations (7) deviennent alors, par la substitution des valeurs de α, $6,\ldots$ données par les équations (8),

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = m\xi + m_1\eta + m_2\zeta + m_3\xi' + \ldots, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = n\xi + n_1\eta + n_2\zeta + \ldots, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = p\xi + p_1\eta + p_2\zeta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations ne diffèrent des équations (6) que par le changement de α, 6, $\gamma,\ldots$ en ξ, η, $\zeta,\ldots$. On remarquera, en outre, que les valeurs de α_1, 6_1, $\gamma_1,\ldots$, que donneront les équations (9), sont précisément celles qui se rapportent à l'équilibre du système après l'introduction des nouvelles forces, et que, par conséquent, ξ, η, $\zeta,\ldots$ sont les déplacements des points par rapport à cette position d'équilibre.

Enfin les équations (8) font voir que les valeurs initiales de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt},\ldots$ sont les mêmes que celles de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d6}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt},\ldots$, tandis que les valeurs initiales de ξ, η, $\zeta,\ldots$ sont égales à celles de α, 6, $\gamma,\ldots$ respectivement diminuées de α_1, 6_1, $\gamma_1,\ldots$.

De là se déduit ce théorème remarquable et simple :

Lorsqu'un système quelconque de points est très-peu dérangé d'une position d'équilibre stable, et qu'on y introduit, en outre, de nouvelles forces constantes et très-petites, le mouvement de chacun de ces points par rapport à sa nouvelle position d'équilibre sous l'influence des premières et des secondes forces réunies, est le même que celui que l'on observerait par rapport à la première position d'équilibre, si l'on donnait au système un état initial qui fût le même, par rapport à cette position, que l'état initial proposé est par rapport à la seconde position d'équilibre.

Ce théorème, étant indépendant du nombre et des distances mutuelles des points, subsiste encore lorsque leur système peut être regardé comme continu. Il aura donc lieu dans tous les petits déplacements des fluides ou des solides élastiques, et, par conséquent, dans toutes les questions que nous avons traitées précédemment.

223. On peut, à priori, se rendre compte de cette proposition, à laquelle un calcul très-simple vient de nous conduire. Nous remarquerons d'abord que, le nouvel état d'équilibre du système après l'introduction des nouvelles forces, étant très-voisin du premier, les équations qui détermineraient le mouvement résultant d'un dérangement par rapport à ce nouvel état, ne différeraient pas des équations (6); car les coefficients ne pourraient avoir varié que de quantités de l'ordre de α, 6,..., et ces variations ne produiraient dans les équations que des termes de l'ordre de ceux qui ont été négligés. De sorte qu'un même dérangement des points relativement à l'une ou l'autre de ces deux positions d'équilibre donnerait lieu, par rapport à elles, à des mouvements respectivement identiques pour chaque point : ce qui démontre le théorème précédent.

Dans le cas particulier où il n'y aurait pas de dérange-

ment initial, le mouvement serait produit par les nouvelles forces seulement, et il serait le même que si l'on partait d'un état initial où les déplacements seraient, au signe près, ceux qui correspondent au nouvel équilibre, et les vitesses nulles.

224. *Superposition des effets.* — La question étant ramenée ainsi à la première, dans laquelle il y a un simple dérangement du système, sans introduction de nouvelles forces, le principe de superposition déjà démontré s'y appliquera. Or, l'état initial peut être considéré comme la superposition de deux autres, dont l'un serait le proposé, et l'autre consisterait uniquement dans les déplacements, changés de signe, qui font passer de la première position d'équilibre à la seconde, et qui sont, au signe près, les valeurs de α_1, 6_1, γ_1,... tirées des équations (9).

D'où l'on voit que *le mouvement cherché résultera de la superposition de deux autres : l'un correspondant à l'état initial proposé, sans introduction de nouvelles forces; l'autre correspondant à l'introduction de ces forces, sans déplacement ni vitesse dans l'état initial.*

Quant au premier de ces deux mouvements, nous avons déjà démontré qu'il pouvait se décomposer d'une infinité de manières; et il est facile de voir qu'il en est de même du second : car la forme des équations (9) montre que si l'on partage les quantités H, K, L,... en un même nombre de parties quelconques, qui pourront être nulles; que l'on ne prenne d'abord que les premières parties, puis les secondes seulement, et ainsi de suite, les valeurs de α_1, 6_1,... qui satisferont à ces systèmes partiels étant respectivement ajoutés, formeront la solution des équations (9). Or, si l'on partage les forces introduites en un nombre quelconque de groupes, les termes tout connus qu'ils donneront dans les équations d'équilibre étant ajoutés entre eux, formeront

respectivement les quantités H, K, L,.... Donc les valeurs de α_1, 6_1,... qui correspondront à chacun de ces groupes étant respectivement ajoutés, formeront les déplacements produits par les forces introduites. Or, les effets des déplacements s'ajoutent; donc *ceux que les divers groupes de forces produiront, se superposeront eux-mêmes.*

225. *Intégration des équations.* — Intégrons maintenant les équations (6) auxquelles tous les cas se ramènent, et dont le nombre, que nous désignerons par n, est égal à celui des coordonnées indépendantes.

On aura une solution de ces équations en posant

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sin(rt+s),\\
6 &= R_1 \sin(rt+s),\\
\gamma &= R_2 \sin(rt+s),\\
\alpha' &= R_3 \sin(rt+s),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Substituant ces expressions dans les équations (6), R_1, R_2,... n'entreront qu'au premier degré, et, si on les élimine, on reconnaîtra facilement que l'équation finale en r sera du degré n par rapport à l'inconnue r^2; on aura ainsi n valeurs pour r, en ne considérant pas les valeurs négatives, parce que les solutions qu'elles donneraient rentreraient dans les autres. Ces valeurs seront toutes réelles et inégales, sans quoi les inconnues s'exprimeraient par des exponentielles ou des termes algébriques qui croîtraient avec le temps, ce qui est contraire à l'hypothèse d'un équilibre stable. Il faut en excepter toutefois les cas particuliers où les coefficients de ces termes se trouveraient nuls d'après l'état initial.

Chaque valeur de r déterminera un système unique de valeurs pour R_1, R_2,..., à moins qu'il n'y ait indétermi-

nation; et si l'on multiplie les valeurs de α, 6, γ,... par une constante arbitraire R, on aura encore une solution des équations (6), et il entrera dans chaque inconnue les deux constantes arbitraires R et s. En ajoutant les solutions obtenues ainsi pour chacune des n valeurs de r, on aura la solution générale des équations (6), puisqu'il y entrera $2n$ constantes arbitraires R, R',..., s, s',.... Elle sera donnée par les formules suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \mathrm{R}\sin(rt+s) + \mathrm{R}'\sin(r't+s') + \ldots, \\ 6 = \mathrm{RR}_1\sin(rt+s) + \mathrm{R}'\mathrm{R}'_1\sin(r't+s') + \ldots, \\ \gamma = \mathrm{RR}_2\sin(rt+s) + \mathrm{R}'\mathrm{R}'_2\sin(r't+s') + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les $2n$ constantes se détermineront par les valeurs initiales de α, 6, γ, α',..., $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d6}{dt}$,....

226. *Décomposition du mouvement en oscillations simples.* — Les mouvements particuliers du système qui correspondent à chacune des n valeurs r, r',... jouissent de quelques propriétés remarquables. Considérons, par exemple, la première : nous aurons

$$\begin{array}{l} \alpha = \mathrm{R}\sin(rt+s), \\ 6 = \mathrm{RR}_1\sin(rt+s), \\ \gamma = \mathrm{RR}_2\sin(rt+s), \\ \alpha' = \mathrm{RR}_3\sin(rt+s), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Or, les déplacements α, 6, γ étant dans des rapports constants, quel que soit t, il s'ensuit que le mouvement du point m est rectiligne; et il en est de même de tous les autres. On voit, de plus, que ce mouvement est périodique, et que la durée de la période est $\frac{2\pi}{r}$. Ainsi, tous les points

font des oscillations rectilignes de même durée; ils commencent et finissent ces oscillations en même temps, et les espaces qu'ils parcourent sont dans des rapports constants. C'est là ce que nous appellerons un *mouvement simple* du système.

Maintenant la seule inspection des équations (11) démontre la proposition suivante :

Tout mouvement d'un système de points en nombre fini, qui ont été dérangés infiniment peu d'une position d'équilibre stable, peut être considéré comme résultant de la composition des diverses oscillations simples dont il est susceptible.

Ces oscillations sont en nombre égal à celui des coordonnées indépendantes, à moins qu'il n'y en ait une infinité, comme nous l'avons remarqué précédemment : celles d'un même système sont *synchrones*, ou de même période; leurs directions diverses et la durée de la période dépendent uniquement de la nature du système, mais leurs amplitudes et les coefficients qui les affectent dans la solution générale, dépendent de l'état initial d'où l'on part.

227. Considérons comme exemple le cas très-simple d'un point unique, soumis à la seule action de la pesanteur, et assujetti à rester sur une surface quelconque. Si on l'écarte de sa position d'équilibre au point le plus bas de la surface, et qu'on lui imprime une très-petite vitesse, il peut décrire une infinité de courbes différentes, dépendantes de l'état initial; mais, comme il n'y a que deux coordonnées indépendantes, il n'existe que deux systèmes d'*oscillations simples,* et l'on prouvera facilement qu'elles ont lieu suivant les deux lignes de courbure de la surface au point le plus bas. Tout autre mouvement résultera de la combinaison de ces deux-là dans des proportions conve-

nables. Dans le cas où tous les rayons de courbure seraient égaux en ce point, toutes les sections normales pourraient être le lieu d'oscillations simples; et il y en aurait alors une infinité.

228. Si les différentes racines r, r',... sont commensurables entre elles, le système repassera périodiquement par les mêmes états; car soit μ leur plus grande commune mesure, on aura

$$r = h\mu, \quad r' = h'\mu, \ldots,$$

h, h',... étant des nombres entiers qui n'ont pas de facteur commun. Or, pour que les valeurs de α, β,... se reproduisent périodiquement après un intervalle de temps θ, il faut que les produits $h\mu\theta$, $h'\mu\theta$,... soient des multiples de 2π, c'est-à-dire que l'on ait, en désignant par k, k',... des nombres entiers,

$$h\mu\theta = 2\pi k, \quad h'\mu\theta = 2\pi k', \ldots.$$

On voit facilement que les nombres k, k',... ayant entre eux les mêmes rapports que h, h',... qui sont premiers entre eux, les plus petites valeurs de k, k',... seront h, h',..., et l'on aura

$$\theta = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Telle sera la durée de la période; elle serait infinie si l'on avait $\mu = 0$, c'est-à-dire s'il n'y avait pas de commune mesure entre r, r',.... Dans ce cas, le mouvement ne serait donc pas périodique; et même le système ne passerait jamais par deux états identiques quant aux positions et aux vitesses; car, si cela était, tous les états suivants se reproduiraient identiquement, et le mouvement serait périodique.

Le principe de la décomposition de tout mouvement in-

finiment petit d'un système de points, dans les mouvements simples dont il est susceptible, étant indépendant du nombre des points, s'applique à un gaz ou à un liquide renfermé dans un vase fermé de tous côtés, ou à un corps solide élastique. Dans ces divers cas, le nombre des points est immense, mais nécessairement fini. Cependant, pour la facilité des calculs, il sera bon de considérer la matière comme continue, et, par conséquent, le nombre des points matériels comme infini. Les mouvements simples seront alors en nombre infini. Les déplacements de tous les points, correspondants à un quelconque de ces mouvements, seront toujours le produit d'une même fonction du temps représentée par un sinus et un cosinus, par une fonction des coordonnées de ces points. Et le mouvement le plus général du système pourra être représenté par une série composée d'un nombre infini de termes, correspondants chacun à l'un des mouvements simples dont le système est susceptible.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

Fig. 1.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 10.

Fig. 14.

Fig. 18.

ntfaucon 1. Paris

Gravé par E. Wormser.